ORTAÖĞRETİM

Matematik

11. Sınıf

Ders Kitabı

Yazarlar

Dr. Reşat SÖYLEMEZ
Barış HACIOSMANOĞLU
Damla YAHYAOĞLU
Emel KIVCI
Fuat SEZER
Hakan ÇEBER
İlker DEMİR
Muhammet KARAYILAN
Musa ALTINTAS
Recep DEMİRCİ
Selim TAŞTEMİR
Uğur TOPUZ
Veysel GÖNENÇ

DEVLET KİTAPLARI
Kitabın Basıldığı Matbaa Adı, 2025

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI NO ..... : 10724
DERS KİTAPLARI DİZİSİ NO ..... : 2474

Her hakkı saklıdır ve Millî Eğitim Bakanlığına aittir. Kitabın metin, soru ve şekilleri kısmen de olsa hiçbir surette alınıp yayımlanamaz.

Editör	**Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN** **Prof. Dr. Hakan YAMAN** **Prof. Dr. Soner DURMUŞ** **Dr. Esat AVCI**
Dil Uzmanı	**Nesibe Bihter USLU** **Sevda UZUN**
Görsel Tasarımcı	**Besime Selen KÖK** **Mehmet DAYDAŞ**
Çoklu Ortam Tasarımcısı	**Betül KAYA** **Elif Pelin ERİŞ** **Hatice Eda İRİTAŞ** **Yusuf SÖNMEZ**
Program Geliştirme Uzmanı	**Doç. Dr. Sevilay YILDIZ** **Dr.Esra DOĞAN** **Dr.Nevin AVCI**
Ölçme ve Değerlendirme Uzmanı	**Doç. Dr. Yasemin KUZU** **Ayşe Suna HAMURCU** **Elif KILIÇ**
Rehberlik Uzmanı	**Fatma Betül ÇAT** **Gülsüm GÜMÜŞ**

Baskı
Baskı Matbaanın Adı ve Ticaret Ünvanı
Tel: (0000) 000 00 00

ISBN 978-605-06002-3-0

Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının 03.07.2026 tarih ve 163723159 sayılı yazısı ile eğitim aracı olarak kabul edilmiştir. Kurulca bu kitabın kabul edilmiş olması ders kitabından yayınevi ve yazarın/yazarların sorumluluğunu kaldırmaz.



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

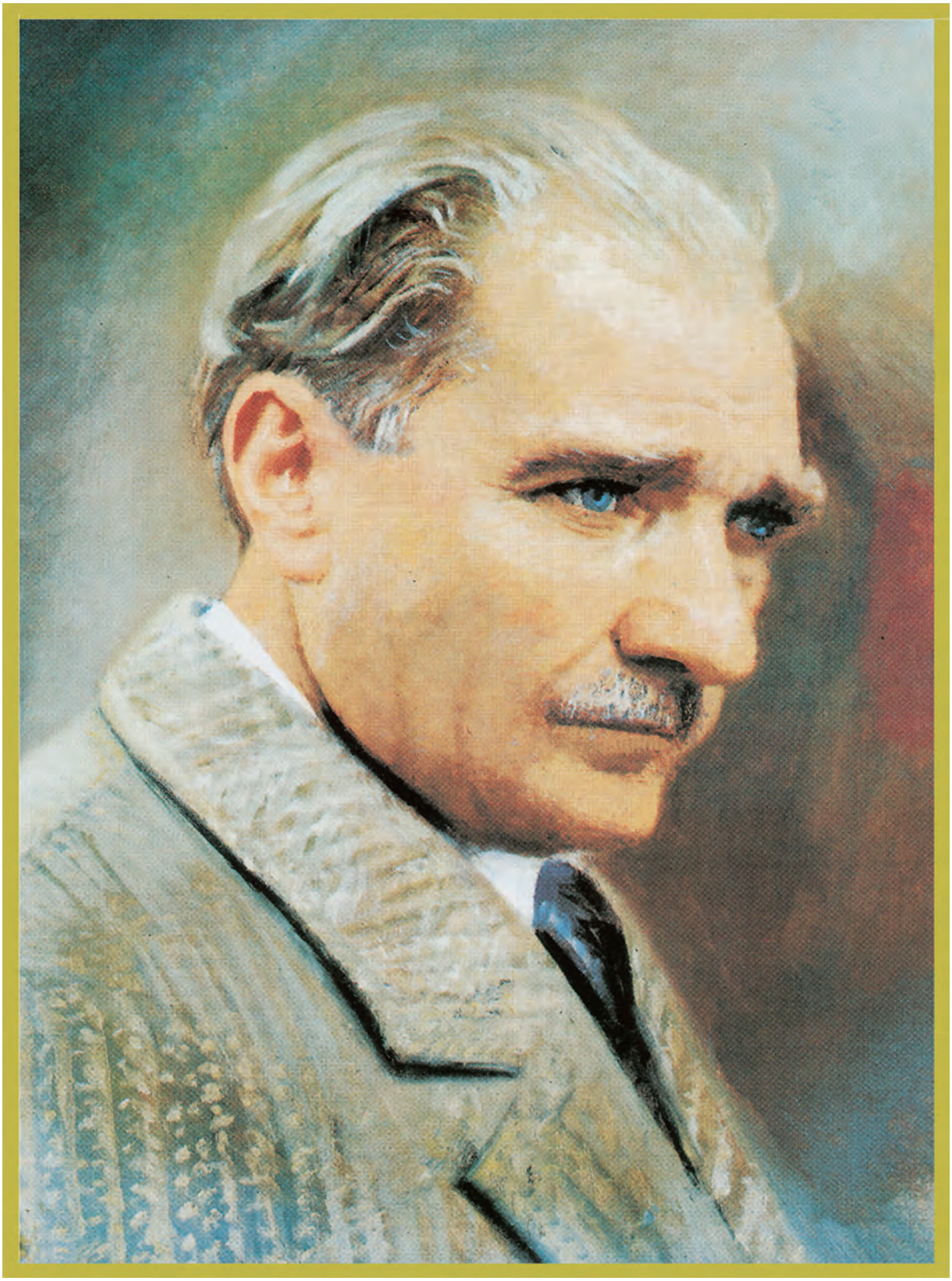
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

Kitabın Tanıtımı 9

1. Tema İSTATİSTİKSEL ARAŞTIRMA SÜRECİ **12**

Ön Değerlendirme 14

1.1. İKİ NİCEL DEĞİŞKENLİ VERİLER 17

Alıştırmalar 54

1.2. BAŞKALARI TARAFINDAN OLUŞTURULAN İKİ NİCEL DEĞİŞKENLİ VERİLERİ İNCELEME 56

Alıştırmalar 61

1. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları 64

2. Tema GEOMETRİK ŞEKİLLER **72**

Ön Değerlendirme 74

2.1. DÖRTGENLERİN ÖZELLİKLERİ 77

Alıştırmalar 117

2.2. ÖZEL DÖRTGENLER ARASINDAKİ İLİŞKİLER 122

Alıştırmalar 127

2.3. ÇOKGENLERİN SINIFLANDIRILMASI 128

Alıştırmalar 132

2.4. DIŞBÜKEY ÇOKGENLERİN ÖZELLİKLERİ 133

Alıştırmalar 150

2.5. ÇOKGENLERLE İLGİLİ PROBLEMLER 154

Alıştırmalar 163

2. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları 164

3. Tema NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER (1) **172**

Ön Değerlendirme 174

3.1. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ 177

Alıştırmalar 227

3.2. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARLA İFADE EDİLEBİLEN DENKLEMLER İÇEREN PROBLEMLER 228

Alıştırmalar 237

3. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları 238

4. Tema NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER (2) 244

Ön Değerlendirme 246

4.1. ÜSTEL FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ 248

Alıştırmalar 266

4.2. ÜSTEL FONKSİYONLARIN TERS FONKSİYONLARI 267

Alıştırmalar 278

4.3. LOGARİTMİK FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ 279

Alıştırmalar 301

4.4. ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARLAİFADE EDİLEBİLEN DENLEM VE EŞİTSİZLİKLER İÇEREN PROBLEMLER 303

Alıştırmalar 314

4. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları 316

5. Tema NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER (3) 322

Ön Değerlendirme 324

3.1. FONKSİYONLARIN BİLEŞKESİ 327

Alıştırmalar 351

3.2. FONKSİYONLARDA DÖRT İŞLEM 353

Alıştırmalar 363

5. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları 365

Sözlük 373

Kaynakça 375

Cevap Anahtarları Karekodu 375

Görsel ve Genel Ağ Kaynakçası Karekodu 375

Türkiye'nin Mülki İdare Bölümleri ile Kara ve Deniz Komşuları Haritası 376

Türk Dünyası Haritası 377

KİTABIN TANITIMI

Temanın işleniş sırası

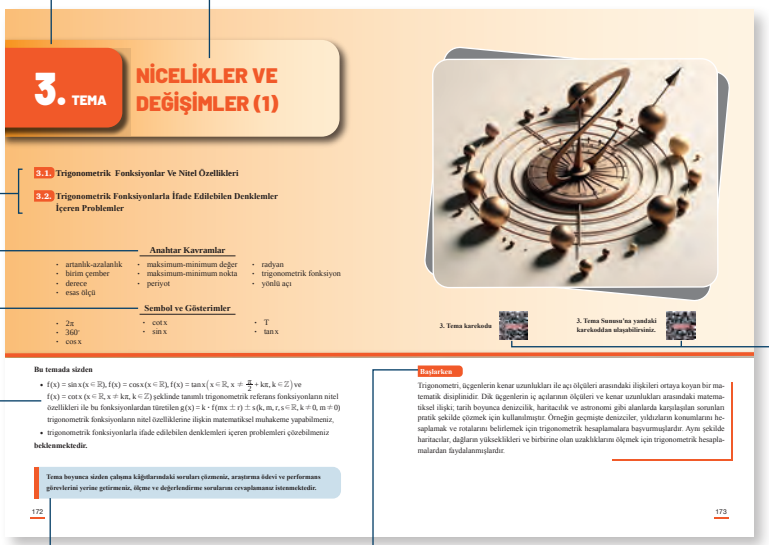
Temanın adı

Temanın içerik çerçevesi

Anahtar kavramlar

Temada kullanılan sembol ve gösterimler

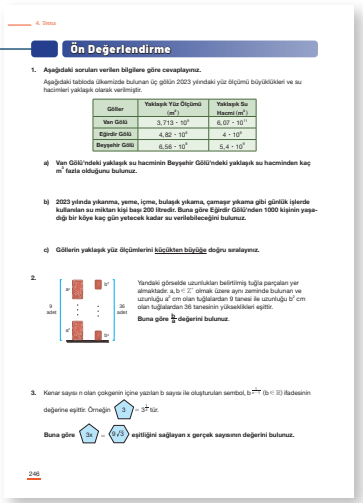
Temaya ait öğrenme çıktıları



Tema sunumuna ve diğer e-içeriklere yönlendiren karekodlar

Temaya giriş niteliğinde olan, yeni bilgi veya becerilerin mevcut bilgi ve deneyimlerle ilişkilendirildiği alan

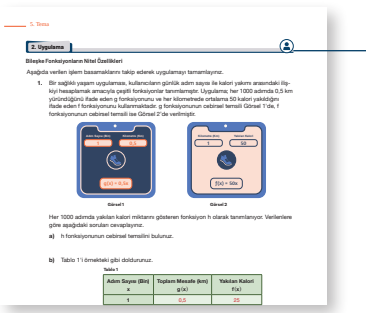
Temada öğrenciden beklenen görev ve sorumlulukların belirtildiği alan



Temaya ait ön değerlendirme sürecinin yer aldığı alan



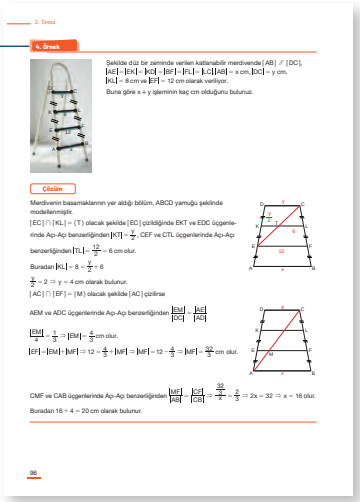
Merak uyandıran, önceki bilgi ve becerilerden temanın içerdiği bilgi ve becerilere geçişi sağlayan alan



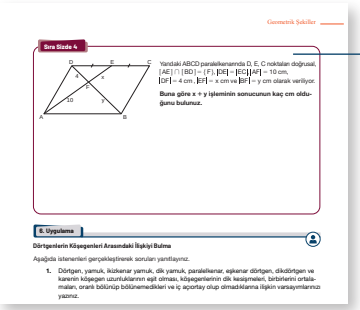
Süreç bileşenlerinin bir görev veya problem bağlamında işletildiği alan

KİTABIN TANITIMI

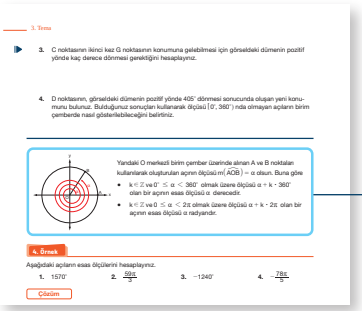
Tema ile ilgili çözümlü örneklerin sunulduğu alan



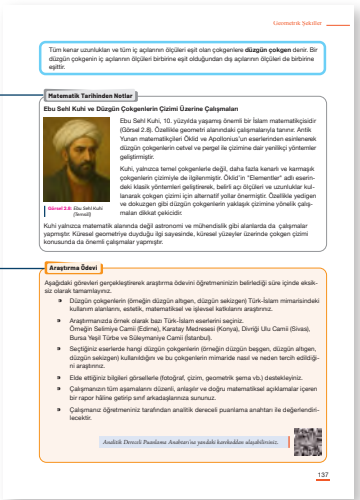
İçerik çerçevesinde çözümü verilmeyen görevlerin yer aldığı alan



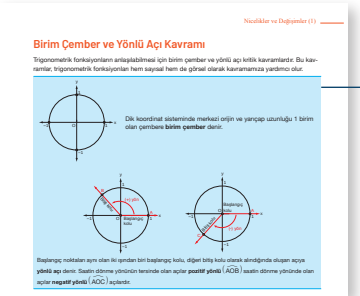
İçerik çerçevesi ile ilgili bilgi verilen alan



Matematik tarihinde önemli yeri olan bilim insanlarından ve yapılan çalışmalardan bahsedilen alan

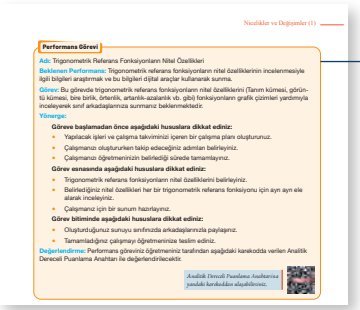


Daha önce öğrenilmiş bilgilerin hatırlatıldığı alan



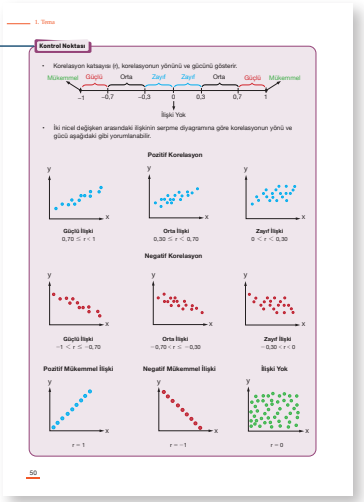
Tema ile ilgili araştırma ödevlerinin verildiği alan

Tema ile ilgili performans görevlerinin verildiği alan

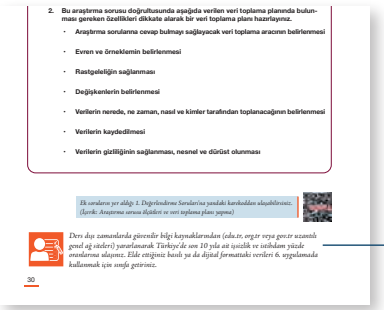


KİTABIN TANITIMI

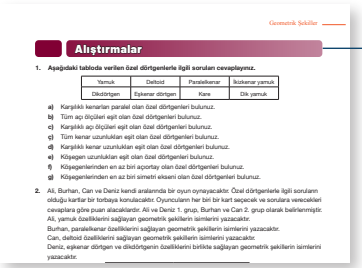
Ulaşılan bilgi, kural, önerme veya sonuçların özetlendiği alan



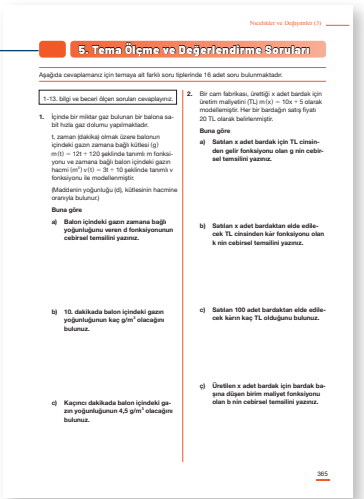
İçerik çerçevesi ile ilgili bilgi verilen alan



Öğrenme çıktısı ile ilgili ölçme ve değerlendirme sorularının yer aldığı alan



Tema ile ilgili ölçme ve değerlendirme sorularının yer aldığı alan



SEMBOLLER

Hesap makinesi

Bireysel Etkinlik

Grup Etkinliği

Örneğin Bittiği Yer

Uygulamanın Bittiği Yer

Sonraki sayfada devam eden çalışma

Önceki sayfadan devam eden çalışma

Ders öncesi hazırlık gerektiren çalışma

1. TEMA İSTATİSTİKSEL ARAŞTIRMA SÜRECİ

1.1. İki Nicel Değişkenli Veriler

1.2. Başkaları Tarafından Oluşturulan İki Nicel Değişkenli Verileri İnceleme

Anahtar Kavramlar

- bölgelere göre sayım oranı
- iki nicel değişkenli veri dağılımları
- ilişkililik
- korelasyon katsayısı
- serpme diyagramı (saçılım grafiği)
- tablo

Bu temada sizden

- iki nicel değişkenli veri ile çalışabilmeniz ve iki nicel değişken arasındaki ilişkililiğe dayalı karar verebilmeniz,
- başkaları tarafından oluşturulan iki nicel değişkenli verilerin ilişkililiğine dayalı istatistiksel sonuç veya yorumları tartışabilmeniz

beklenmektedir.

Tema boyunca sizden ölçme ve değerlendirme sorularını cevaplamanız, çalışma kâğıtlarındaki soruları ve alıştırma sorularını çözmeniz, kavram haritası ve kontrol listesini doldurmanız, performans görevini yerine getirmeniz istenecektir.



1. Tema karekodu

1. Tema Sunusu'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Başlarken

İstatistik, belirli olayların gözlemlenip bu gözlemlerden anlamlı ve güvenilir bilgiler elde edilmesini sağlar. Pek çok ekonomik, sosyal ve yönetimsel karar alınırken istatistiksel tekniklerle elde edilen bilgilerden yararlanılır. Bu bilgiler, iki nicel değişken arasındaki ilişkililiğin incelenmesiyle geleceğe yönelik tahminlerde bulunmaya yardımcı olur. Örneğin bir denizdeki tuzluluk oranının denizdeki balıkların yaşam süresine etkisi, buzullardaki erime miktarının dünyanın ortalama sıcaklığına etkisi, yağış miktarının barajların doluluk oranına etkisi gibi durumlar incelenerek geleceğe yönelik tahminler yapılabilir ve gerekiyorsa bu durumlarla ilgili önlemler alınabilir.

Ön Değerlendirme

1. Tek nicel değişkenli ve iki kategorik değişkenli veri ile ilgili önceki sınıflarda edindiğiniz bilgiler ve yaptığınız gözlemler doğrultusunda istatistiksel araştırma sürecine dair öğrendiklerinizden de faydalanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız. Cevaplarınızı sınıf arkadaşlarınızla tartışarak soruların altında boş bırakılan yerlere yazınız.

a) En çok ilginizi çeken istatistiksel araştırma süreci neydi?

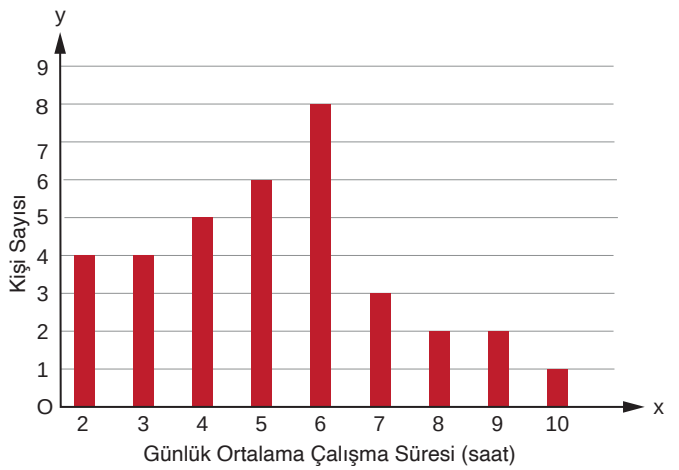
b) Şu an bir araştırma sorusu yazacak olsanız araştırmanızın konusu ve araştırma sorunuz ne olurdu?

c) Tek nicel değişkenli veriye dayalı istatistiksel araştırma süreci ile iki kategorik değişkenin ilişkililiğine dayalı istatistiksel araştırma süreci arasındaki farkları örneklendirerek açıklayınız.

ç) İstatistiksel araştırma sorularının yorumlanmasında verilerin doğru ve objektif biçimde değerlendirilmesi neden önemlidir?

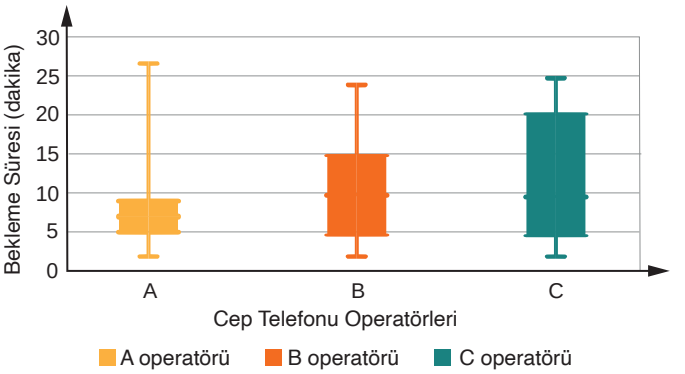
d) İstatistiksel araştırma sorusu kapsamında evrenin çok büyük olduğu ve tamamına ulaşmanın mümkün olmadığı durumlarda araştırmanın devamı için nasıl bir yol izlemek gerekir?

2. Aşağıdaki sütun grafiğinde 35 kişinin çalıştığı bir iş yerinde işçilerin günlük ortalama çalışma süreleri (saat) verilmiştir.



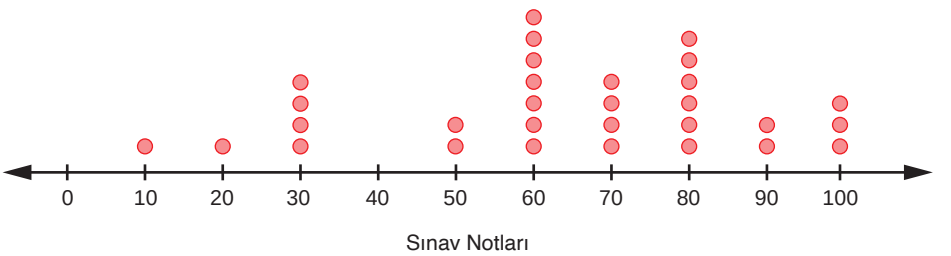
Bu sütun grafiğinin hazırlanmasını gerektirecek araştırma sorusunun ne olabileceğini yazınız.

3. Aşağıdaki kutu grafiğinde üç farklı cep telefonu operatörünün müşteri hizmetleri hattında bekleme süreleri (dakika) verilmiştir.



Buna göre müşteri hizmetleri hattında uzun süre beklemek istemeyen birinin hangi cep telefonu operatörünü tercih etmesinin doğru olacağını gerekçeleriyle açıklayınız.

4. Matematik Öğretmeni Banu Hanım, 11-A sınıfı öğrencilerinin matematik sınavından aldıkları notların eğilimini görmek için aşağıdaki nokta grafiğini oluşturmuştur.



Buna göre

a) Grafiğe bakarak matematik sınavına kaç kişinin girdiği anlaşılabilir mi? Nedenleriyle yazınız.

b) Öğrencilerin sınavdan aldığı notlar nasıl bir eğilim göstermektedir? Nedenleriyle yazınız.

c) Öğrencilerin sınavdan aldığı notların gösterdiği eğilimin aritmetik ortalama, ortanca, tepe değer, açıklık, standart sapma gibi özetleme araçlarından hangisi ile bulunması daha anlamlı olur? Nedenleriyle yazınız.

5. Aşağıdaki tabloda bir lokantada müşterilerin tercih ettiği tavuk, kebap, balık gibi bazı yemek türleri ile şalgam, ayran, meyve suyu gibi bazı içecek türleri verilmiştir.

Müşteri	Yemek Türü	İçecek Türü	Müşteri	Yemek Türü	İçecek Türü
1. müşteri	Tavuk	Meyve suyu	11. müşteri	Kebap	Ayran
2. müşteri	Kebap	Ayran	12. müşteri	Tavuk	Ayran
3. müşteri	Balık	Şalgam	13. müşteri	Balık	Şalgam
4. müşteri	Tavuk	Şalgam	14. müşteri	Kebap	Ayran
5. müşteri	Kebap	Meyve suyu	15. müşteri	Tavuk	Meyve suyu
6. müşteri	Tavuk	Meyve suyu	16. müşteri	Balık	Şalgam
7. müşteri	Balık	Şalgam	17. müşteri	Balık	Meyve suyu
8. müşteri	Kebap	Şalgam	18. müşteri	Tavuk	Şalgam
9. müşteri	Tavuk	Meyve suyu	19. müşteri	Kebap	Şalgam
10. müşteri	Balık	Şalgam	20. müşteri	Kebap	Ayran

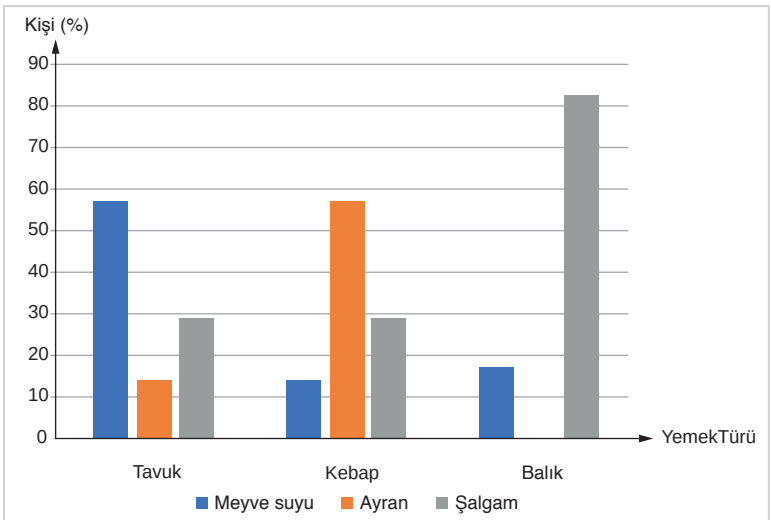
Buna göre

a) Verilenleri dikkate alarak iki kategorik değişken içeren bir istatistiksel araştırma sorusu oluşturunuz.

b) Tablodaki verileri kullanarak aşağıdaki "iki yönlü göreli sıklık tablosu"nu doldurunuz.

İçecek Tercihi / Yemek Tercihi	Meyve suyu	Ayran	Şalgam	Toplam
Tavuk				
Kebap				
Balık				

c) Yukarıdaki verilerden yola çıkılarak oluşturulan ve koşullu göreli sıklıkları gösteren kümeli sütun grafiğini yorumlayınız.



1.1. İKİ NİCEL DEĞİŞKENLİ VERİLER

Konuya Başlarken

Atmosfere salınan gazların sera etkisi yaparak Dünya yüzeyinin sıcaklığını artırması olayına **küresel ısınma** denmektedir. Küresel ısınmanın nedenlerinden biri fosil yakıt kullanan araçların egzozlarından çıkan karbondioksit, metan ve azot oksit gibi gazlardır. Fotosentez esnasında karbondioksit kullanan bitkilerin sayısı artırılarak ve fosil yakıt kullanan araç sayısı azaltılarak küresel ısınmanın hızı yavaşlatılabilir.

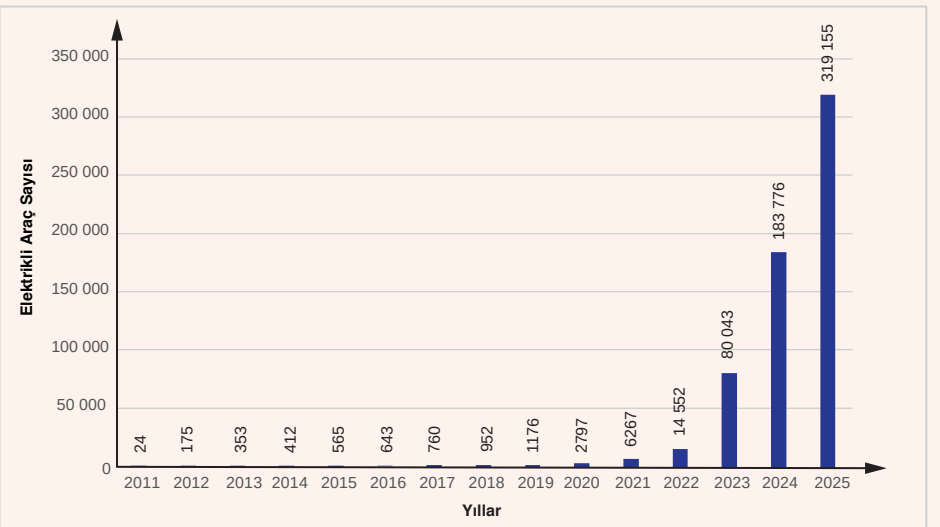
Hibrit araçlar hem fosil yakıt hem de elektrik enerjisi kullanan araçlardır. Elektrikli araçlar ise fosil yakıtlı araçlar gibi içten yanmalı motorlara sahip değildir. Bu nedenle egzoz gazı üretmezler ve çevreye zararlı olan gazları yaymazlar.

Türkiye'de elektrikli araç kullanımı her geçen gün artmaktadır. Türkiye, elektrikli araç endüstrisindeki üretimleriyle sektör pazarında da kendine yer edinmiştir. Görsel 1.1'de Türkiye'de üretilen bir elektrikli araç verilmiştir.



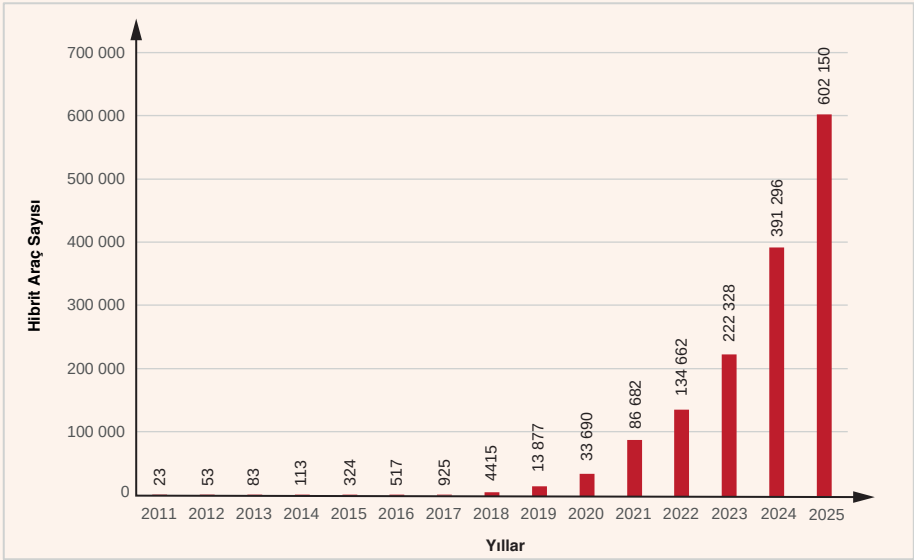
Görsel 1.1: *Türkiye'de Üretilen Elektrikli Araç*

Grafik 1.1'de 2011-2024 yılları arasında ve 2025 yılı Eylül ayı sonu itibarıyla Türkiye'de trafiğe kayıtlı elektrikli otomobil sayıları verilmiştir.



Grafik 1.1: *Türkiye'de 2011-2025 (Eylül) Yılları Arasındaki Trafiğe Kayıtlı Elektrikli Otomobil Sayıları (TÜİK)*

Grafik 1.2'de 2011-2024 yılları arasında ve 2025 yılı Eylül ayı sonu itibarıyla Türkiye'de trafiğe kayıtlı hibrit otomobil sayıları verilmiştir.



Grafik 1.2: *Türkiye'de 2011-2025 (Eylül) Yılları Arasındaki Trafiğe Kayıtlı Hibrit Otomobil Sayıları (TÜİK)*

Grafik 1.1 ve Grafik 1.2'de verilen istatistiki verileri inceleyerek sınıf arkadaşlarınızla aşağıdaki sorular üzerine tartışınız.

1. **Türkiye'de trafiğe kayıtlı elektrikli otomobil sayısının artması ile trafiğe kayıtlı hibrit otomobil sayısının artması arasında bir ilişki olup olmadığını gerekçeleriyle açıklayınız.**

2. **Türkiye'deki elektrikli otomobil sayısı ile dünyadaki elektrikli otomobil sayısı arasında bir ilişki olup olmadığını anlamak için hangi bilgilere ulaşmak gerekir?**

3. **İki nicel değişkenli soruların cevaplanabilmesi için çizgi, nokta, histogram, kutu grafikleri ile kök-yaprak gösterimi gibi görselleştirme araçlarının yeterli olup olmadığını gerekçeleriyle açıklayınız.**

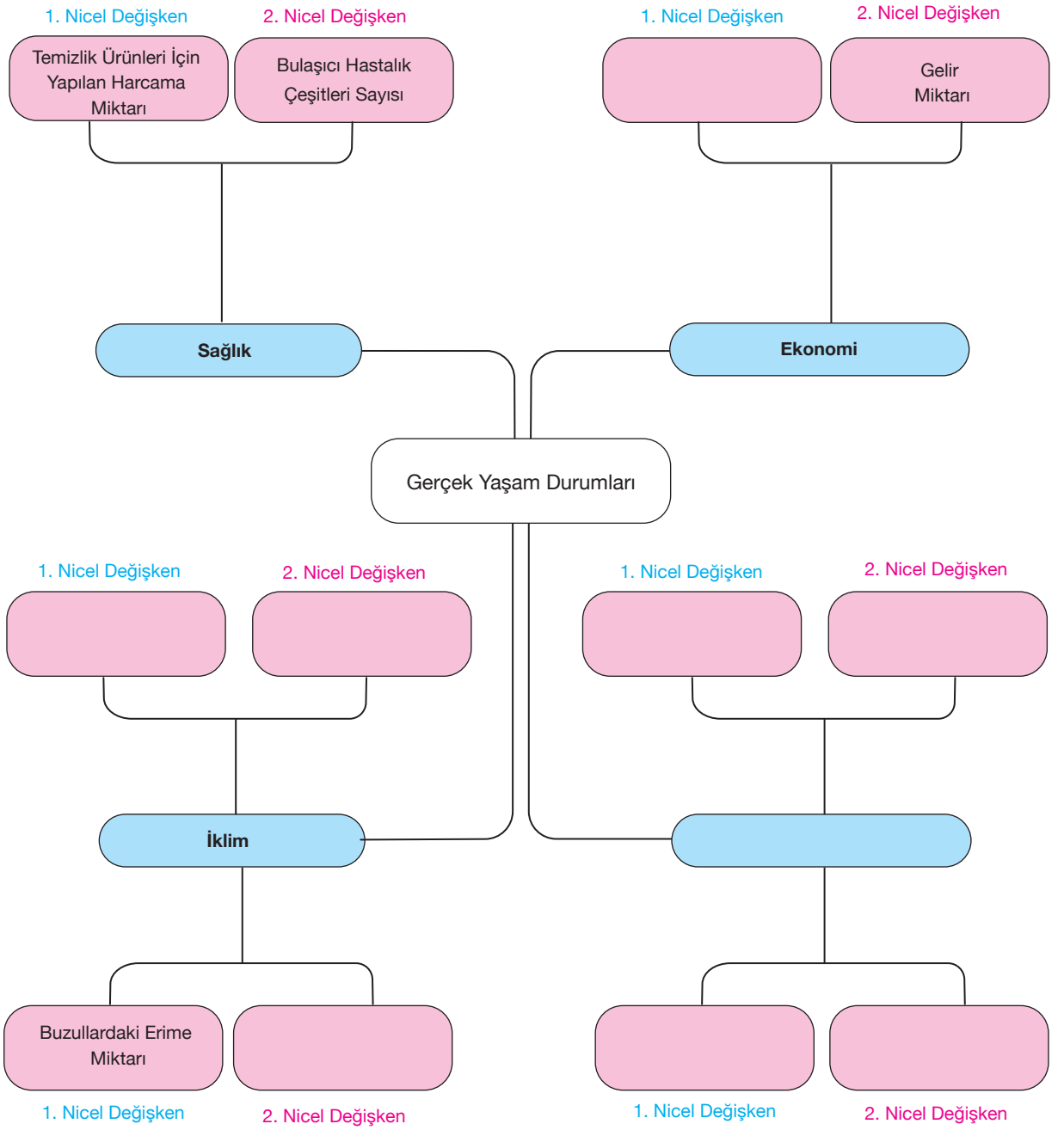
İki Nicel Değişkenli Veriye Dayalı Araştırmalarda İstatistiksel Bağlam

İstatistiksel araştırmalarda "bağlam" verilerin elde edilmesi, elde edilen bu verilerin doğru bir şekilde yorumlanması ve sonuçların geçerliliğinin değerlendirilmesi için önemli bir yere sahiptir. İstatistiksel teknikler kullanılarak iki nicel değişkenli verilerin incelenmesi, bu değişkenler arasında ilişki olup olmadığını belirlemeye ve araştırmacının bu ilişkiler hakkında tahminlerde bulunmasına olanak sağlar. Böylece araştırmacı, iki nicel değişken arasındaki modellemelerden yararlanarak gelecekte oluşabilecek durumları yorumlayabilir. İstatistiksel araştırmalara ihtiyaç duyulan ve bu araştırma sonuçlarını uygulayan alanlar oldukça geniştir. Genetik, biyoloji, tarım, tıp, ilaç yapımı, halk sağlığı, çevre bilimleri, ekonomi, finans, eğitim, psikoloji, sosyoloji, pazarlama, spor ve mühendislik bunlardan bazılarıdır.

1. Uygulama

İstatistiksel Bağlam Oluşturma

Aşağıda bir kısmı boş olarak verilen diyagramın kollarında gerçek yaşam durumlarından yola çıkılarak iki nicel değişkenli verilerdeki ilişkililiğe yönelik araştırma sorularına kaynaklık eden istatistiksel bağlamlar ve bu bağlamları oluşturan nicel değişkenler verilmiştir.



Verilen diyagrama göre aşağıdaki işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı gerçekleştiriniz.

1. Diyagramda yer alan gerçek yaşam durumlarından sağlıkla ilgili olan 1 ve 2. nicel değişkeni verilen istatistiksel bağlam örneklerini sınıf arkadaşlarınızla birlikte inceleyiniz. Bu bağlamların iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektirip gerektirmediği üzerine sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız. Düşüncelerinizi özgürce ifade ederken kendinizi arkadaşlarınızın yerine koyunuz ve arkadaşlarınızı da saygılı bir şekilde dinleyiniz.

2. Diyagramda yer alan, ekonomi ile ilgili gerçek yaşam durumu için boş bırakılan alana 1. nicel değişkeni yazınız.
3. Diyagramda yer alan, iklim ile ilgili gerçek yaşam durumu için boş bırakılan alanlara 1 ve 2. nicel değişkenleri yazınız. "Yazdığınız nicel değişkenler, iklim gerçek yaşam durumundan başka gerçek yaşam durumları için de kullanılabilir mi?" sorusu üzerine sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.
4. Diyagramda yer alan gerçek yaşam durumlarından sağlıkla ilgili olan nicel değişkenlerden temizlik ürünleri için yapılan harcama miktarı ve bulaşıcı hastalık çeşitleri sayısı arasında bir ilişki var mıdır? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.
5. Yakın çevrenizde veya dünyada ilginizi çeken ve merak ettiğiniz iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren bir gerçek yaşam durumu belirleyiniz. Belirlediğiniz gerçek yaşam durumunu boş bırakılan alana yazınız. Bu gerçek yaşam durumuna ait iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren istatistiksel bağlamları sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.
6. Yazdığınız istatistiksel bağlamları dijital ortamda zihin haritası gibi araçlarla hazırlayarak sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. Örnek

Aşağıdaki tabloda gerçek yaşam durumlarına yönelik bağlamlara ait birinci nicel değişkenler verilmiştir. Verilen birinci nicel değişkenle ilişkili olabilecek ikinci nicel değişkenleri tabloda boş bırakılan uygun alanlara yazınız.

Birinci Nicel Değişken	İkinci Nicel Değişken
Karbon salınım miktarı (milyon ton CO_2)	
Yağış miktarı (kg/m^2)	
Eğitim süresi (yıl)	
Fosil yakıtların kullanım miktarı (kg)	

Çözüm

Aşağıdaki tabloda uygun alanlara ikinci nicel değişken örnekleri yazılarak veri toplamayı gerektiren bağlamlar oluşturulabilir.

Birinci Nicel Değişken	İkinci Nicel Değişken
Karbon salınım miktarı (milyon ton CO_2)	Fabrika sayısı Motorlu taşıt sayısı
Yağış miktarı (kg/m^2)	Heyelan sayısı Barajların doluluk oranı (%)
Eğitim süresi (yıl)	Nüfus artış hızı (%) Okunan kitap sayısı
Fosil yakıtların kullanım miktarı (kg)	Solunum yolu hastalıkları sayısı Hava kirliliği düzeyi (%)

Sıra Sizde 1

Aşağıdaki tabloda gerçek yaşam durumlarına yönelik iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren istatistiksel bağlamların birinci nicel değişkeni verilmiştir.

Birinci Nicel Değişken	İkinci Nicel Değişken
Aracın yakıt tüketim miktarı (lt)	
Tarımda sulama miktarı (lt)	
Ekonomik büyüme oranı (%)	

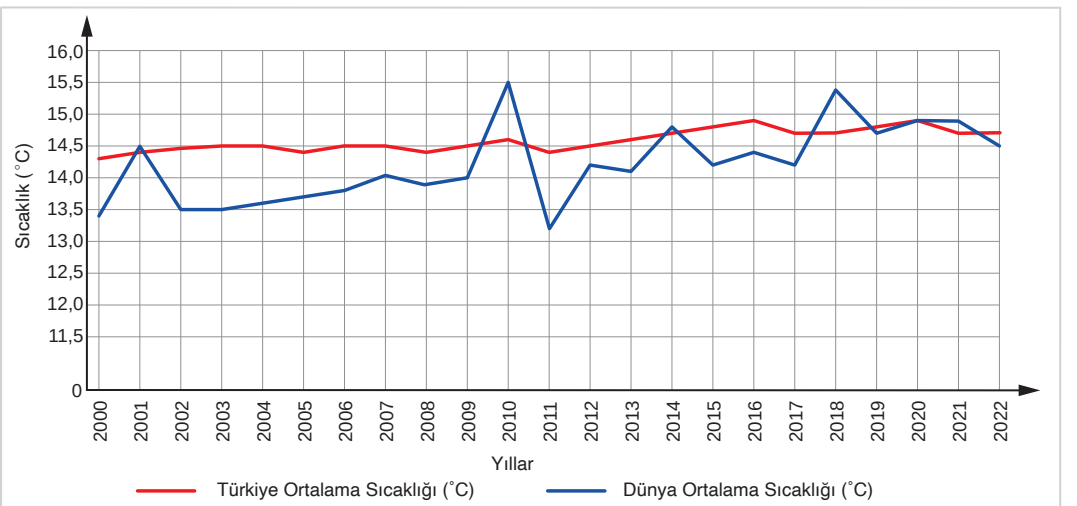
Buna göre

1. **Tabloda verilen birinci nicel değişkenlerle ilişkisi olabileceğini düşündüğünüz ikinci nicel değişken örneklerini boş bırakılan yerlere yazınız. Oluşturduğunuz bağlamların iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren bağlamlar olup olmadığı hakkındaki fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.**
2. **Boş bırakılan birinci nicel değişken kutucuğuna merak ettiğiniz, ilgi duyduğunuz bir istatistiksel bağlam belirleyiniz. Belirlediğiniz bağlamla ilgili birinci nicel değişken ve ikinci nicel değişkenleri tabloda boş bırakılan yerlere yazınız.**

İki Nicel Değişkenli Veriye Dayalı İstatistiksel Araştırma Sorusu Oluşturma

Araştırma sorusu oluşturmak araştırmanın yönünü belirleyen en temel adımdır. Bu durum iki nicel değişkenli veriye dayalı istatistiksel araştırma soruları için de geçerlidir. Açık biçimde ifade edilmiş araştırma sorusu, araştırma yapılırken hangi verilerin toplanması ve hangi yöntemlerin kullanılması gerektiği ile ilgili sorulara da net cevap verecektir. Bu sayede yapılan araştırmada tutarlı ve amaca uygun sonuçlara ulaşmak mümkün olacaktır.

Grafik 1.3'te Türkiye'de ve dünyada 2000-2022 yılları arasındaki yıllık ortalama sıcaklık (˚C) değerleri verilmiştir.



Grafik 1.3: *Türkiye'de ve Dünyada 1971-2022 Yılları Arasındaki Yıllık Ortalama Sıcaklık Değerleri*

(Genel ağdan alınmıştır.)

Verilen grafik incelendiğinde bu verilere bakılarak oluşturulabilecek araştırma sorusu ne olabilir? Araştırma sorunuzun cevabı iki nicel değişken arasındaki ilişkiye dair cevap olur mu? İstatistiksel araştırma sorusu oluşturulurken nelere dikkat edilmesi gerektiği üzerine sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

2. Uygulama

İki Nicel Değişkenli Veri Toplamayı Gerektiren Araştırma Sorusu Oluşturma

Tarih boyunca insanların boy ortalaması sürekli değişim göstermiştir. Günümüzdeki insanlar yüzyıl önceki atalarından ortalama olarak daha uzundur. Günümüze kadar geçen süre içerisinde insan boyunun hangi aşamalardan geçerek değiştiğinin bilinmesi, ileride insan boyunun ne gibi değişimler geçireceği yönünde tahminde bulunulmasına yardımcı olacaktır. Bu bağlamda bir sınıftaki öğrenciler, gelecekteki bireylerin boy ortalamalarını belirleyebilmek için araştırma yapmak istemektedir.

Öğretmeninizin rehberliğinde 4-6 kişilik gruplara ayrılarak aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz ve uygulamayı tamamlayınız

1. Aşağıdaki tabloda birinci nicel değişken olarak insan boyu verilmiştir. Grup olarak tabloda boş bırakılan yere uygun ikinci nicel değişkenleri yazınız. Yazdığınız ikinci nicel değişkenlerden biri için iki nicel değişken arasındaki ilişkiyi inceleyen araştırma sorunuzu yazınız.

Birinci Nicel Değişken	İkinci Nicel Değişken
İnsan Boyu (cm)	

İki nicel değişken arasındaki ilişkiyi inceleyen araştırma sorusu sorunuz:

2. Oluşturduğunuz araştırma sorunuzun uygunluğunu, aşağıdaki istatistiksel araştırma sorusu ölçütlerine göre grup çalışması yaparak değerlendiriniz. Değerlendirmenizin sonucunu ilgili boşluklara nedenleriyle yazınız ve diğer gruplarla paylaşınız. Fikirleriniz üzerine arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız.

- Araştırma sorusunun amacı net midir?
- Soru araştırmaya değer mi?
- İlgilenilen grup (evren) açıkça görülmekte midir?
- Değişkenler açıkça görülmekte midir?
- Araştırma sorusu veri toplanarak cevaplanabilir mi?
- Araştırma sorusu değişebilirliği yansıtmakta mıdır?
- Odaklanılan grup araştırmaya imkân vermekte midir?
- Araştırma sorusu nicel veri toplamaya uygun mudur?

3. Diğer grupların paylaştığı araştırma sorularından istatistiksel araştırma sorusu ölçütlerini sağlamayan sorular varsa araştırma sorusunu ölçütleri sağlayacak şekilde, grup çalışmasıyla düzenleyiniz.

2. Örnek

Konutlarda, sanayide ve hizmet sektöründe kullanılan doğal gaz, elektrik üretiminde de kullanılmaktadır ve dünyada enerji üretiminde kullanılan önemli kaynaklardan biridir. Yapılan çalışmalarda Türkiye'nin farklı şehirlerinde hizmet veren doğal gaz dağıtım şirketleri ile şehirlerin doğal gaz tüketimi miktarı incelenmiş ve bu incelemeler doğrultusunda doğal gaz tüketimi miktarını etkileyen birden fazla ekonomik sebep olabileceği sonucuna varılmıştır.

Bu doğrultuda sorulabilecek araştırma sorularından biri de "Türkiye'de ekonomik büyüme oranları (%) ile kullanılan doğal gaz miktarı (m^3) arasında bir ilişki var mıdır?" sorusudur.

Buna göre bu soruyu istatistiksel araştırma sorularında olması gereken ölçütleri göz önünde bulundurarak inceleyiniz.

Çözüm

Araştırma Sorusu Ölçütleri	Sorunun İlgili Ölçütü Karşılayıp Karşılamadığına Dair Fikirleriniz
Araştırma sorusunun amacı açık mıdır?	Amaç açıktır. Soru, ekonomik büyüme oranları ile kullanılan doğal gaz miktarı arasındaki ilişkiyi incelemeyi amaçlayan net bir sorudur.
Soru araştırmaya değer midir?	Türkiye'nin ekonomik çıkarları bakımından düşünülürse araştırmaya değerdir.
İlgilenilen grup (evren) açıkça görülmekte midir?	Araştırma sorusu Türkiye için sorulduğundan ilgilenilen evren açıkça görülmektedir.
Değişkenler açıkça görülmekte midir?	Değişkenler açıkça görülmektedir. Araştırma sorusundaki değişkenler ekonomik büyüme oranları ile kullanılan doğal gaz miktarıdır.
Araştırma sorusu veri toplanarak cevaplanabilir mi?	Araştırma sorusu, iki nicel değişkenli verilerle cevaplanabilecek yapıdadır. Dijital ortamlarda araştırma yapılarak ikincil verilere ulaşılabilir.
Araştırma sorusu değişebilirliği yansıtmakta mıdır?	Değişebilirliği yansıtmaktadır. Yıllara göre ekonomik büyüme oranları ve kullanılan doğal gaz miktarı değişebileceğinden soru, değişebilirliği yansıtmaktadır.
Odaklanılan grup, araştırma yapılmasına imkân vermekte midir?	Araştırma sorusu, Türkiye'deki ekonomik büyüme oranları ile Türkiye'de kullanılan doğal gaz miktarı arasındaki ilişkiyi analiz etmeye yöneliktir. Dolayısıyla odaklanılan grup bellidir ve araştırılma yapılmasına imkân vermektedir.
Araştırma sorusu nicel veri toplamayı gerektirir mi?	Araştırma sorusunda toplanması beklenen veriler, ekonomik büyüme oranları ile kullanılan doğal gaz miktarlarıdır. İki değişken de bir ölçüm sonucu elde edilebilecek veriler olduğundan nicel değişkenlerdir. Araştırma sorusu nicel veri toplamayı gerektirir.

Sıra Sizde 2

2022 yılı sonu itibarıyla Türkiye, Avrupa genelinde en çok doğal gaz abonesi olan üçüncü ülke olmuştur. Listenin ilk sırasında İtalya ve ikinci sırasında Almanya yer almaktadır. Türkiye'de 2022 yılı sonu itibarıyla doğal gaz abone sayısı 19,7 milyona ulaşmıştır. Bu sayı bireysel anlamda nüfusumuzun neredeyse dörtte birine karşılık gelmektedir. Ülkemizde bir ailenin ortalama 3 kişiden oluştuğu kabul edilirse birçok evde doğal gaz kullanıldığı söylenebilir.

Bu doğrultuda sorulabilecek sorulardan biri de "Nüfus artış hızı (%) ile kullanılan doğal gaz miktarı (m^3) arasında bir ilişki var mıdır?" sorusudur.

Buna göre bu soruyu istatistiksel araştırma sorularında olması gereken ölçütleri göz önünde bulundurarak inceleyiniz. Cevaplarınızı nedenleriyle boş bırakılan yerlere yazınız.

Araştırma Sorusu Ölçütleri	Sorunun İlgili Ölçütü Karşılayıp Karşılamadığına Dair Fikirleriniz
Araştırma sorusunun amacı açık mıdır?	
Soru araştırmaya değer midir?	
İlgilenilen grup (evren) açıkça görülmekte midir?	
Değişkenler açıkça görülmekte midir?	
Araştırma sorusu veri toplanarak cevaplanabilir mi?	
Araştırma sorusu değişebilirliği yansıtmakta mıdır?	
Odaklanılan grup, araştırma yapılmasına imkân vermekte midir?	
Araştırma sorusu nicel veri toplamayı gerektirir mi?	

3. Uygulama

Farklı Disiplinlere Ait İki Nicel Değişkenli Araştırma Sorusu Oluşturma

Aşağıdaki soruları cevaplayarak uygulamayı tamamlayınız.

1. Aşağıdaki tabloda farklı disiplinlere ilişkin iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren birer istatistiksel araştırma sorusu verilmiştir. Tablodaki ilgili bölümlere örneklerdeki gibi farklı disiplinlere ait iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren istatistiksel araştırma sorularınızı yazınız.

Disiplinler	Araştırma Soruları
Astronomi ve Uzay Bilimleri	Gezegenlerin Güneş'e olan uzaklıkları (km) ile dönme hızları (km/sa.) arasında bir ilişki var mıdır?
Ekonomi	Kırıkkale'deki kişilerin gelir miktarı (TL) ile yaptıkları tasarruf miktarı (TL) arasında bir ilişki var mıdır?
Spor	Türkiye'de spora başlama yaşı ile profesyonel sporcu sayısı arasında bir ilişki var mıdır?
Biyoloji	Omurgalı hayvanların kütleleri (kg) ile yaşam süreleri (yıl) arasında bir ilişki var mıdır?

2. Enerji tasarrufuna yönelik hazırlanan planda, ev yaşam alanı (m^2) ile tüketilen elektrik miktarı (kWh) arasında bir ilişki olup olmadığına dair araştırma sorunuzu oluşturunuz ve sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

3. Bireylerin spor yapma süreleri (dakika) ile kalp atış hızları (dakika/atış sayısı) arasında ilişki olup olmadığına dair araştırma sorunuzu oluşturarak düşüncelerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

Nicel Veri Toplama Planı Yapma, Verileri Toplama ve Analize Hazır Hâle Getirme

Verileri hazır hâle getirmek, analiz sürecinin doğru ve güvenilir sonuçlar vermesi için önemli bir adımdır. Bu durum iki nicel değişkenli veriye dayalı istatistiksel araştırma süreci için de geçerlidir. Ancak düzenlenmemiş veya eksik veriler yanlış yorumlara yol açabileceğinden verilerin düzenlenmesi ve uygun biçime dönüştürülmesi son derece önemlidir. Bu sayede araştırma sürecinde analizler daha hızlı yapılacak ve hata payı azalacağı için elde edilen sonuçlar daha sağlıklı bir şekilde değerlendirilecektir.



Görsel 1.2: *Parmaktan Nabız Ölçen Alet*

Nabız, kalbin bir dakikada kaç kez attığını gösteren ve atardamar duvarlarında hissedilen basınç dalgalarıdır. Nabız hızı; günlük aktiviteler, egzersiz, stres ya da dinlenme durumuna göre artabilir veya azalabilir. Sağlık durumunun önemli bir göstergesi olarak kabul edilen nabzın, özellikle yaş ilerledikçe düzenli olarak kontrol edilmesi önerilir. Nabız ölçümü ise parmaktan, bilekten veya boyundan kolaylıkla yapılabilir (Görsel 1. 2).

Bir araştırma şirketi insanların yaşları ile nabız atış değerleri arasında bir ilişki olup olmadığını anlamak için 1000 hastanın tedavi gördüğü bir hastanede araştırma yapmak istemiştir. Yapacağı araştırmada veri toplama planı oluşturup bu doğrultuda toplanan verileri analize hazır hâle getirirken nelere dikkat etmelidir? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

4. Uygulama

İki Nicel Değişkenli Veri Toplamayı Gerektiren İstatistiksel Araştırma Sorusu Oluşturarak Veri Toplama Planı Yapma, Verileri Toplama ve Analize Hazır Hâle Getirme

Aşağıdaki işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı gerçekleştiriniz.

1. Öğretmeniniz rehberliğinde 4-6 kişilik gruplara ayrılınız.
2. Seçim yöntemiyle bir grup sözcüsü seçiniz.
3. Grup olarak ilgi duyduğunuz, merak ettiğiniz iki nicel veri toplamayı gerektirecek bir gerçek yaşam durumu yazınız.

   Belirlediğiniz iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren gerçek yaşam durumu:

4. Grup olarak belirlediğiniz iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren gerçek yaşam durumunu grup sözcüsü aracılığıyla tahtaya yazarak diğer gruplarla paylaşınız.
5. Tahtada yazılı olan iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren gerçek yaşam durumlarından birini sınıf arkadaşlarınızla oylama yolu ile belirleyiniz.

   Sınıf arkadaşlarınızla birlikte belirlenen iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren gerçek yaşam durumu:

6. Grubunuzla sınıf arkadaşlarınızla belirlenen iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren gerçek yaşam durumuna yönelik bir araştırma sorusu yazınız. Sorunuzu yazarken istatistiksel araştırma sorusu ölçütlerini dikkate alınız.

İki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren istatistiksel araştırma sorusu:

7. Grup arkadaşlarınızla oluşturduğunuz araştırma sorunuzu grup sözcüsü aracılığıyla diğer gruplara sununuz. Diğer grupların araştırma sorularının istatistiksel araştırma sorusu ölçütlerini taşıyıp taşımadığını aşağıdaki kontrol listesinde işaretleyiniz ve araştırma sorularınızı diğer gruplarla tartışınız.

Nicel Veri Toplamayı Gerektiren İstatistiksel Araştırma Sorusu Ölçütleri	Evet	Hayır
Amaç açıktır.		
İlgilenilen grup (evren) açıkça görülmektedir.		
Değişkenler açıkça görülmektedir.		
Değişebilirliği yansıtmaktadır.		
Araştırmaya değerdir.		
Veri toplanarak cevaplanabilmektedir.		
Odaklanılan grup araştırmaya imkân vermektedir.		
Nicel veri toplamayı gerektirmektedir.		

8. Sınıf arkadaşlarınızla üzerinde tartıştığınız ve uzlaştığınız araştırma sorunuzu aşağıya yazınız. Karar verilen araştırma sorusunun ilk yazdığınız soruyla farklılık ve benzerliklerini değerlendiriniz.

Sınıf arkadaşlarınızla uzlaştığınız iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren istatistiksel araştırma sorusu:

9. Araştırma sorunuz doğrultusunda grubunuzla aşağıdaki veri toplama planını hazırlayınız.

Veri Toplama Planı

1. adım: Araştırma sorularına cevap bulunmasını sağlayacak veri toplama aracının belirlenmesi veya oluşturulması

2. adım: Evren ve örneklemin belirlenmesi

3. adım: Rastgeleliğin sağlanması

4. adım: Değişkenlerin belirlenmesi

5. adım: Verilerin nerede, ne zaman, nasıl ve kimler tarafından toplanacağının belirlenmesi

6. adım: Verilerin kaydedilmesi

7. adım: Verilerin gizliliğinin sağlanması, nesnel ve dürüst olunması

10. Hazırladığınız veri toplama planını diğer gruplarla paylaşınız. Diğer grupların paylaştığı planları ise aşağıdaki veri toplama planında bulunması gereken özellikler açısından inceleyiniz. İncelemeniz sonucunda elde ettiğiniz fikirleri diğer gruplarla paylaşarak fikirleriniz üzerine tartışınız. Tartışma sonucunda sınıf arkadaşlarınızla uzlaştığınız tek bir veri toplama planı oluşturunuz.

Sınıf arkadaşlarınızla uzlaştığınız veri toplama planı:

1. adım: Araştırma sorularına cevap bulunmasını sağlayacak veri toplama aracının belirlenmesi veya oluşturulması

2. adım: Evren ve örneklemin belirlenmesi

3. adım: Rastgeleliğin sağlanması

4. adım: Değişkenlerin belirlenmesi

5. adım: Verilerin nerede, ne zaman, nasıl ve kimler tarafından toplanacağının belirlenmesi

6. adım: Verilerin kaydedilmesi

7. adım: Verilerin gizliliğinin sağlanması, nesnel ve dürüst olunması

11. Oluşturduğunuz veya hazır edindiğiniz veri toplama aracı ile verilerinizi toplayınız. Verileri toplarken kişisel verilerin gizliliğine, tutarlı, tarafsız, doğru ve güvenilir olmasına dikkat etmeniz gerektiğini unutmayınız.

12. Topladığınız verilerin araştırma sorusuna cevap verip veremeyeceğine ve elde edilen sonuçların evrene genellenip genellenemeyeceği üzerine sınıf arkadaşlarınızla eleştirel bir bakış açısıyla tartışınız.

13. Elektronik tablolama programına veya istatistik yazılımına topladığınız verilerin girişini yapınız. Bu verileri 8. uygulama bölümünde kullanmak için saklayınız.

3. Örnek

Lise öğrencisi Havva, bir araştırma ödevinde "Türkiye'de Hidroelektrik Santral (HES) sayısı arttıkça HES'lerden üretilen elektrik miktarı (kWh) artmakta mıdır?" sorusuna cevap aramak istemiştir.

Buna göre Havva'nın yapacağı araştırmanın veri toplama planında bulunması gereken özellikler dikkate alınarak araştırmaya yönelik bir veri toplama planının nasıl hazırlanacağını bulunuz.

Çözüm

Araştırmanın amacı ve veri toplama planında bulunması gereken özellikler dikkate alınarak veri toplama planı aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

1. adım: Araştırma sorularına cevap bulmayı sağlayacak veri toplama aracının belirlenmesi

Araştırma sorusuna cevap almaya yönelik resmî "kurumların yayınladığı yıllık raporlar ve istatistiki bültenler veri toplama aracı olarak kullanılabilir. Bu veriler not alınıp tablolaştırılabilir.

2. adım: Evren ve örneklemin belirlenmesi

Araştırma, Türkiye'de hizmet veren hidroelektrik santraller için gerçekleştirilecektir. Bu nedenle araştırmanın evreni, Türkiye'de hizmet veren HES'lerin tamamıdır. Türkiye'de hizmet veren tüm HES'lerin verilerine ulaşmak mümkün değilse de evreni temsil edecek küçük bir örneklem seçilebilir. Örneğin; kuruluş yılı, büyüklüğü ve bölgesel dağılımına göre rastgele santraller seçilebilir.

3. adım: Rastgeleliğin sağlanması

İstatistiksel araştırmalarda örneklemin evreni temsil etmesi gerekmektedir. Türkiye'de faaliyet gösteren tüm HES'lerin verilerine ulaşmak zaman, maliyet ve iş gücü bakımından mümkün olmayabilir ancak Türkiye'de faaliyet gösteren HES'ler içinden örneklem olarak farklı bölgelerden kuruluş yılına göre (eski, yeni) ve büyüklüğüne göre (küçük, orta, büyük) gruplandırılarak seçilmiş HES'lerin belirlenmesi rastgeleliğin sağlanması için önemlidir. Bu seçim yöntemi, HES'lerin farklı yıllarda ve farklı koşullarda oluşan verilerini kapsayarak sonuçların Türkiye'deki tüm HES'ler evrenine genellenebilmesini sağlayacaktır.

4. adım: Değişkenlerin belirlenmesi

HES sayısı ile HES'lerde üretilen elektrik miktarı arasında santralin kurulu gücü, suyun debisi, bölgenin iklimsel koşulları ve bakım durumu gibi birçok değişken bulunmaktadır. Bu araştırmada nicel değişkenler HES sayıları ve HES'lerin ürettiği elektrik miktarıdır.

5. adım: Verilerin nerede, ne zaman, nasıl ve kimler tarafından toplanacağının belirlenmesi

Araştırma grubundaki bir araştırmacı tarafından resmî kurumların genel ağ sitelerinde yayınlanan HES'lerle ilgili yıllık raporlar ve istatistiki bültenler incelenebilir.

6. adım: Verilerin kaydedilmesi

Veriler elektronik tablolama programına, istatistiksel analiz programlarına veya istatistik programlarına kaydedilebilir.

7. adım: Verilerin gizliliğinin sağlanması, nesnel ve dürüst olunması

Veri toplama aşamasında, eğer kişilerle ilgili bilgiler toplanıyorsa kişisel verilerin korunmasına dikkat edilmelidir. Toplanan veriler, araştırmacının beklentilerine göre değiştirilmemeli ve tüm veriler olduğu gibi kaydedilmelidir. Araştırma sırasında nesnel ve dürüst davranmak elde edilen sonuçların güvenilirliği için çok önemlidir.

Sıra Sizde 3

UNESCO, gençlik dönemini 15-25 yaş aralığı olarak belirlemiştir. Genç nüfus, yeni fikirler üretmeye ve teknolojik gelişimlere daha açık olduğu için ülkenin üretim kapasitesine destek olarak ekonomik gelişmelere katkıda bulunabilir.

TÜİK verilerine göre 2024 yıl sonu itibarıyla Türkiye'nin toplam nüfusu 85 milyon 664 bin 944 kişi iken 15-24 yaş grubundaki genç nüfus 12 milyon 763 bin 159 kişi oldu. Genç nüfus, toplam nüfusun %14,9'unu oluşturdu. Genç nüfusun %51,2'sini erkek nüfus, %48,8'ini ise kadın nüfus oluşturdu. Birleşmiş Milletler'e göre genç nüfus, 1950 yılında toplam nüfusun %20,8'ini oluştururken bu oran 2024 yılında %14,9 oldu.

Nüfus göstergelerindeki mevcut yapının devam edeceğini varsayan ana senaryoya göre genç nüfus oranının 2030 yılında %14,8, 2040 yılında %12,2, 2060 yılında %10,3, 2080 yılında %8,8 ve 2100 yılında %9,6 olacağı öngörülüyor.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Buna göre

1. **Verilen bilgilerden yola çıkarak iki nicel değişkenli veriler arasındaki ilişkililiğe yönelik bir araştırma sorusu oluşturunuz.**

2. **Bu araştırma sorusu doğrultusunda aşağıda verilen veri toplama planında bulunması gereken özellikleri dikkate alarak bir veri toplama planı hazırlayınız.**
   - **Araştırma sorularına cevap bulmayı sağlayacak veri toplama aracının belirlenmesi**
   - **Evren ve örneklemin belirlenmesi**
   - **Rastgeleliğin sağlanması**
   - **Değişkenlerin belirlenmesi**
   - **Verilerin nerede, ne zaman, nasıl ve kimler tarafından toplanacağının belirlenmesi**
   - **Verilerin kaydedilmesi**
   - **Verilerin gizliliğinin sağlanması, nesnel ve dürüst olunması**

Ek soruların yer aldığı 1. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Araştırma sorusu ölçütleri ve veri toplama planı yapma)

Ders dışı zamanlarda güvenilir bilgi kaynaklarından (edu.tr, org.tr veya gov.tr uzantılı genel ağ siteleri) yararlanarak Türkiye'de son 10 yıla ait işsizlik ve istihdam yüzde oranlarına ulaşınız. Elde ettiğiniz basılı ya da dijital formattaki verileri 6. uygulamada kullanmak için sınıfa getiriniz.

Nicel Veriye Dayalı İstatistiksel Araştırmalarda Veri Analizi Yapma ve Sonuçları Yorumlama

İki nicel değişkenli veriye dayalı istatistiksel araştırmalarda veri analizi, elde edilen nicel verilerin incelenip anlamlı sonuçlara dönüştürülmesi sürecidir. Günlük yaşamda sorunların çözülmesi, daha doğru kararların verilmesi veya farklı veri setleri arasındaki ilişkinin anlaşılması amacıyla veri analizinden yararlanılır. İki nicel değişken arasındaki veri analizinin temel hedefi; ham veriyi düzenleyerek veriler arasındaki ilişkileri ortaya koymak, ardından bu ilişkiler üzerinden karşılaştırmalar yapmak ve elde edilen sonuçları yorumlamaktır.

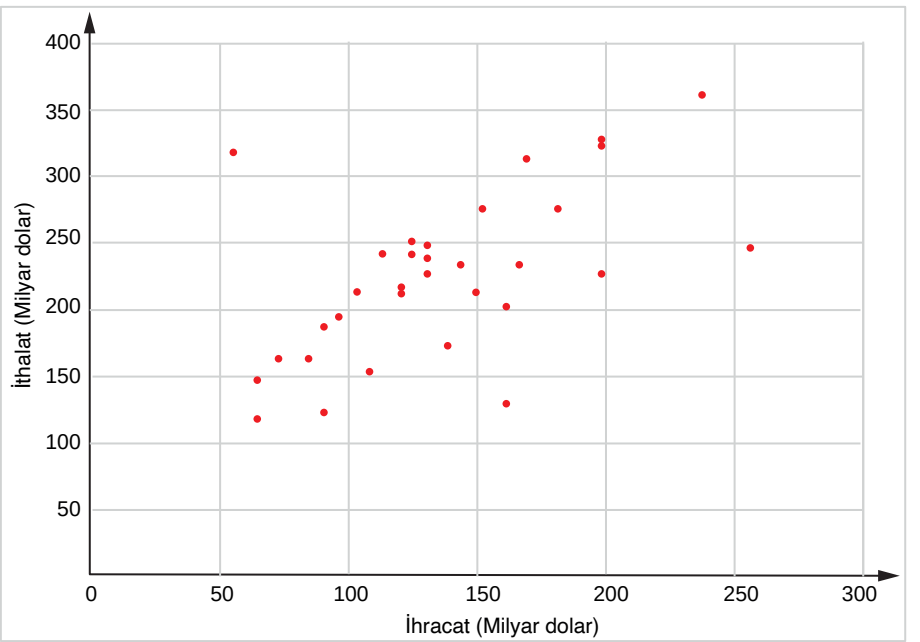
Ülke içerisinde üretilen mal ya da hizmetin yurt dışına satılma faaliyetine ihracat, ülke içinde bir mala ya da hizmete yönelik oluşan talebi gidermek amacıyla yurt dışından satın alma faaliyetine ise ithalat denir. İhracatın bir ülkeye

- Ekonomik büyümeye doğrudan katkı
- Döviz geliri ve cari açık dengesi
- Şirketler için büyüme fırsatları

İthalatın ise

- Teknoloji ve bilgi transferi
- Rekabet gücünün artması
- İstihdam yaratılması

gibi çok yönlü etkileri bulunmaktadır. Bir ülkenin ihracat ve ithalat miktarlarının yaklaşık değerlerini araştıran bir şirket, araştırmaları doğrultusunda Grafik 1.4'te yer alan verilere ulaşmıştır.



Grafik 1.4: *Bir ülkenin 2005-2023 Yılları Arasındaki Dış Ticaret Verileri*

Grafik 1.4'te yer alan verilerin nasıl elde edilmiş olabileceği ve bu verilerin nasıl analiz edilebileceği hakkındaki fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla birlikte tartışınız.

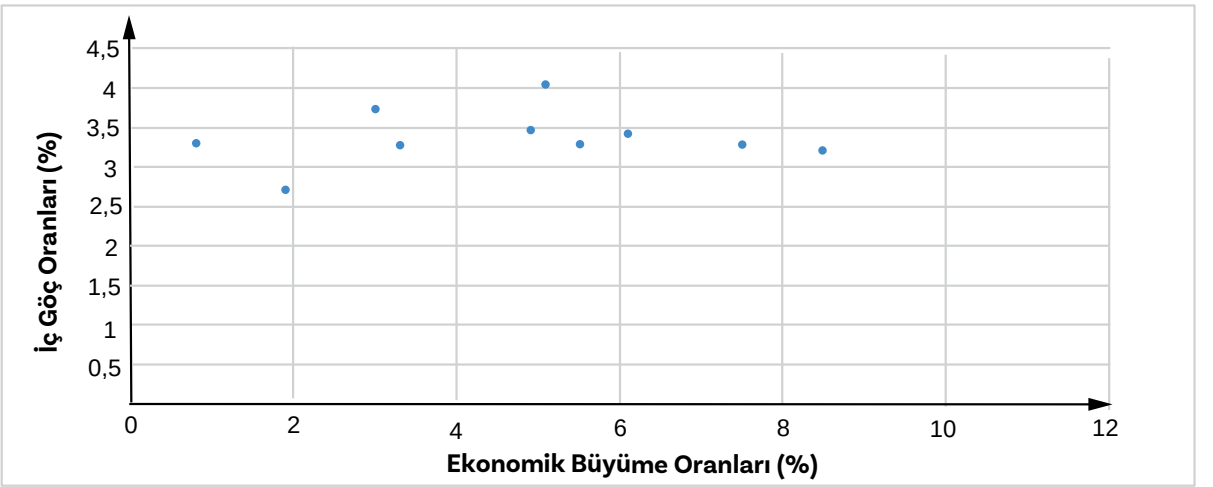
5. Uygulama

Veri Analizi Yapma

Ülke sınırları içerisinde yapılan göçe iç göç denir. İş imkânları, sağlık hizmetleri gibi temel ihtiyaçları karşılamak için yapılan iç göç, ülkenin iş gücü yapısını ve ekonomik büyüme oranlarını etkilemektedir. Dolayısıyla iç göçün kontrollü bir şekilde yönetilmesi ülke ekonomisi için önem arz etmektedir. Bu bağlamda bir ülkenin yıllara göre iç göç ve ekonomik büyüme oranları arasındaki ilişkiyi araştıran bir araştırma şirketi 2010-2025 yılları arasındaki verilere ulaşarak yandaki tabloyu oluşturmuştur.

Araştırma şirketi, tablodaki verileri analiz etmek için istatistik yazılımına girmiştir. Girişi yapılan verilerle aşağıdaki grafik oluşturulmuştur.

Yıllar	Ekonomik Büyüme Oranları (%)	İç Göç Oranları (%)
2015	8,5	3,20
2016	4,9	3,45
2017	6,1	3,41
2018	3,3	3,28
2019	7,5	3,28
2020	3	3,73
2021	0,8	3,30
2022	1,9	2,70
2023	11,4	3,28
2024	5,5	3,27
2025	5,1	4,04



Buna göre

1. Grafiğe bakarak bu ülkenin iç göç ve ekonomik büyüme oranları arasında bir ilişki olup olmadığına karar verilebilir mi? Gerekçeleri ile açıklayınız.

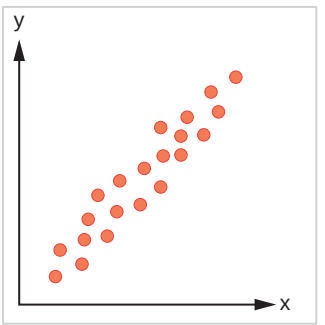
2. Bu ülkenin iç göç oranları ile ekonomik büyüme oranları arasındaki ilişki, grafikteki noktaların birbirine yakınlığı ile ilgili midir? Gerekçeleri ile açıklayınız.

3. "Bir ülkedeki ekonomik büyüme oranlarındaki değişimin nedeni o ülkede yaşanan iç göç hareketleridir." sonucuna ulaşılabilir mi yoksa bu değişimin başka nedenleri de var mıdır? Gerekçeleri ile açıklayınız.

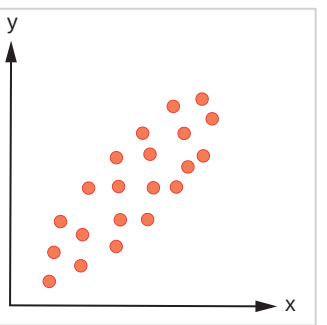
Serpme Diyagramı (Saçılım Grafikleri)

Serpme diyagramı; dağılım grafiği veya saçılım grafiği olarak da bilinir. İki nicel değişken arasında bir ilişki mevcut olup olmadığını tespit etmek amacıyla kullanılır. Serpme diyagramı, iki nicel değişkenin değerlerini görüntülemek için koordinatlar kullanılarak oluşturulan noktalar topluluğudur. Veri kümesindeki iki nicel değişkenin her ögesi dik koordinat sisteminde (x, y) ile gösterilir. x ve y değerlerinden ikisi de artıyorsa veya ikisi de azalıyorsa "İki nicel değişken arasında pozitif yönlü ilişki, biri artarken diğeri azalıyorsa iki nicel değişken arasında negatif yönlü ilişki vardır." denir. Noktalar bir eğilim veya desen oluşturur. Noktalar, varsayılan bir doğrusal eğilim çizgisine ne kadar yakın ve sıkı bir şekilde dizilmiş olursa iki nicel değişken arasındaki ilişkinin de o kadar güçlü olduğu söylenir (Grafik 1.5 ve Grafik 1.8). Eğilim çizgisinden kısmen uzak olursa ilişkinin orta (Grafik 1.6 ve Grafik 1.9), çok uzak ve dağınık olursa ilişkinin zayıf (Grafik 1.7 ve Grafik 1.10) olduğu söylenir. Noktalar herhangi bir desen oluşturmadan dağınık hâlde olursa bu iki nicel değişken arasında ilişki yok (Grafik 1.11) denir.

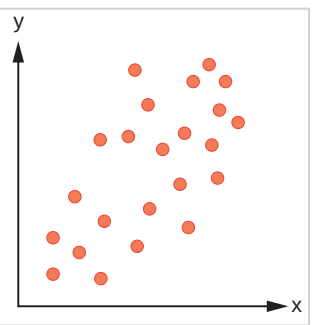
Pozitif İlişki



Grafik 1.5: *Güçlü ilişki*

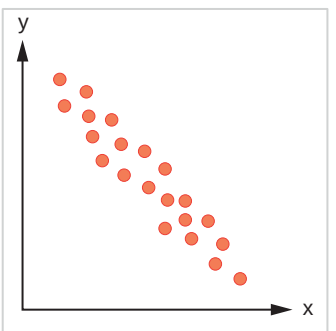


Grafik 1.6: *Orta ilişki*

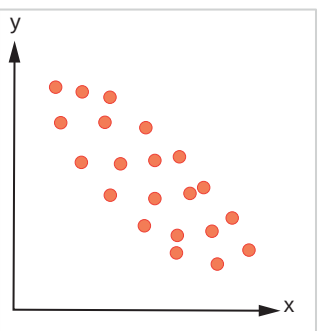


Grafik 1.7: *Zayıf ilişki*

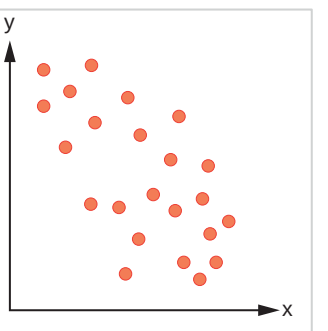
Negatif İlişki



Grafik 1.8: *Güçlü ilişki*

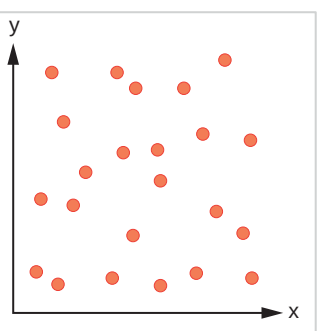


Grafik 1.9: *Orta ilişki*



Grafik 1.10: *Zayıf ilişki*

İlişki Yok



Grafik 1.11: *İlişki yok*

6. Uygulama

Serpme Diyagramı Çizme ve Veri Analizi Yapma

Son yıllarda işsizlik, dünya çapında önemli problemlerden biri hâline gelmiştir. Hem gelişmekte olan hem de gelişmiş ülkeler ekonomik olarak büyümelerine rağmen işsizlik sorununa çözüm aramayı sürdürmektedir. Eğitim sisteminin iş gücü piyasasına göre düzenlenmesi, küçük ve orta ölçekli işletmelere yatırımların artırılması, üretimi artıracak teşviklerin verilmesi işsizlik sorunu için alınabilecek önlemlerden bazılarıdır. Bu nedenle eğitim politikaları, yapılan yatırımlar ve verilen teşvikler istihdam odaklı planlandığında işsizlik oranlarının düşmesini sağlayabilir.

"Türkiye'de işsizlik ve istihdam oranları arasında bir ilişki var mıdır?" şeklinde iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren istatistiksel araştırma sorusu ile ilgili aşağıda istenenleri gerçekleştirerek uygulamayı tamamlayınız.

1. "Türkiye'de işsizlik ve istihdam oranları arasında bir ilişki var mıdır?" sorusunu cevaplayabilmeniz için ihtiyacınız olan verilere nasıl ve nereden ulaşabileceğiniz hakkında arkadaşlarınızla tartışınız.
2. Sayfa 30'da uygulama ön hazırlık kısmında ulaştığınız Türkiye'de son 10 yıla ait işsizlik ve istihdam verilerine göre aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Yıl	İşsizlik Oranları (%)	İstihdam Oranları (%)

3. Bu tablodaki verilerden yola çıkarak istatistik yazılımı yardımıyla bir serpme diyagramı oluşturunuz.
4. Grafiği inceleyerek iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren "Türkiye'de işsizlik ve istihdam oranları arasında bir ilişki var mıdır?" istatistiksel araştırma sorusunu sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.
5. Türkiye'deki işsizlik ve istihdam oranları arasındaki ilişkinin gücü hakkında fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.
6. Elde ettiğiniz cevapları karşılaştırarak sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız. Tartışma sonunda en güçlü gerekçeye sahip ortak bir yorumda uzlaşmaya çalışınız.

Bölgelere Göre Sayım Oranı (BSO) ve Korelasyon Katsayısı

Saçılım grafiklerinde iki nicel değişken arasında sıklıkla bir ilişki olduğu görülür. İki veya daha fazla değişken arasında ilişki olup olmadığını belirlemek ve ilişki varsa yönünü incelemek için en sık kullanılan istatistik yöntemi korelasyon analizidir. Korelasyon, iki nicel değişken arasındaki ilişkiyi ifade eder. İki nicel değişken arasında pozitif veya negatif yönlü bir ilişki olabileceği gibi herhangi bir ilişki de olmayabilir. Aşağıda iki nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren bazı araştırma soru örnekleri verilmiştir.

- Kayseri'deki 9. sınıf öğrencilerinin okudukları kitap sayıları ile katıldıkları spor etkinliklerinin sayıları arasında bir ilişki var mıdır?
- Sakarya'daki ilkokul öğrencilerinde doğru davranışın pekiştirilmesi oranı ile düzenli çalışma alışkanlığının kazanılma oranı arasında bir ilişki var mıdır?
- Rize'deki tarım arazilerinin topraktaki tuzluluk oranı (%) ile yetiştirilen ürün çeşidi miktarı arasında bir ilişki var mıdır?

Örnekleri verilen nicel değişkenler arasındaki ilişkiyi konu edinen araştırma sorularının yanıtlanabilmesi için korelasyon katsayısının hesaplanması gerekir. Korelasyon katsayısı istatistik yazılım programları yardımıyla hesaplanabilir.

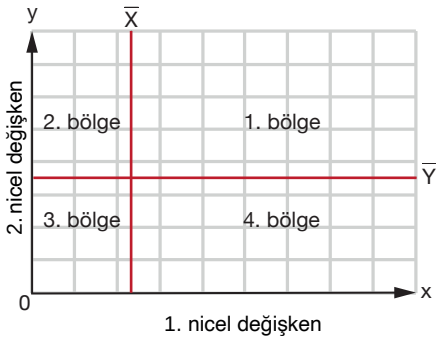
Korelasyon katsayısı (r) bir orandır ve -1 ile 1 arasında değer alır. Nicel değişkenlerden biri artarken diğeri de artıyorsa korelasyon katsayısı pozitiftir ve değişkenler arasında pozitif korelasyon (pozitif yönlü ilişki) vardır.

Nicel değişkenlerden biri artarken diğeri azalıyorsa korelasyon katsayısı negatiftir ve değişkenler arasında negatif korelasyon (negatif yönlü ilişki) vardır. Aralarında mükemmel ilişki bulunan nicel değişkenlerin korelasyon katsayısı 1 veya -1'dir. Aralarında ilişki bulunmayan nicel değişkenlerin korelasyon katsayısı sıfırdır. Korelasyon katsayısı, iki nicel değişken arasındaki doğrusal ilişkinin yönüne (pozitif, negatif) ve gücüne (ilişki yok, zayıf, orta, güçlü, mükemmel) dair bilgi vermektedir.

İlişkinin Yönü / İlişkinin Gücü	Negatif Yön	Pozitif Yön
Mükemmel İlişki	$r = -1$	$r = 1$
Güçlü İlişki	$-1 < r \leq -0,70$	$0,70 \leq r < 1$
Orta İlişki	$-0,70 < r \leq -0,30$	$0,30 \leq r < 0,70$
Zayıf İlişki	$-0,30 < r < 0$	$0 < r < 0,30$
İlişki Yok	$r = 0$	$r = 0$

Korelasyon analizi, iki değişken arasında istatistiksel bir ilişki olup olmadığını incelerken, bu ilişkinin bir neden-sonuç (nedensellik) ilişkisi olduğunu göstermez. İki değişken birbiriyle yüksek oranda ilişkili görünebilir; ancak bu, birinin diğerine doğrudan sebep olduğu anlamına gelmez. Örneğin bir ülkedeki güneşli gün sayısı arttığında o ülkedeki insanların mutluluk endeks oranlarının da artıyor olması, güneşin insanları doğrudan mutlu ettiğini ispatlamaz. Bu korelasyon, gizli bir değişkenin etkisinden kaynaklanıyor olabilir. Güneşli günlerin arttığı bir bölgede aynı zamanda ekonomik refah, dışarıda geçirilen sürenin artması veya düşük suç oranı gibi başka faktörler de yüksek olabilir. İşte bu gizli değişkenler hem mutluluğu hem de güneşli gün sayısını etkileyerek iki değişken arasında yanıltıcı bir birliktelik oluşturur. Bu ayrımı yapmak, istatistiksel sonuçları yorumlamak için kritik bir adımdır.

Korelasyon katsayısının hesaplanmasında kullanılan yöntemlerden biri de BSO (bölgelere göre sayım oranı) yöntemidir. İki nicel değişkene ait verilerle oluşturulan serpme diyagramındaki x değişkenlerinin aritmetik ortalaması $\overline{X}$, y değişkenlerinin aritmetik ortalaması $\overline{Y}$ ile gösterilir. $\overline{X}$ ile $\overline{Y}$ sayılarına göre çizilen ortalama eksenleri yardımıyla dik koordinat sistemi dört bölgeye ayrılır (Grafik 1.12). Her bölgedeki nokta sayısı bulunur. Nokta aritmetik ortalama ekseni üzerindeyse BSO hesaplamasına dâhil edilmez.



Grafik 1.12: *Aritmetik Ortalamalarla Dört Bölgeye Ayrılmış Dik Koordinat Sistemi*

Her iki değişkene göre aritmetik ortalamadan büyük olan (1. bölge) nokta sayısı ile her iki değişkene göre aritmetik ortalamadan küçük olan (3. bölge) nokta sayısının toplamından diğer bölgelerdeki (2 ve 4. bölge) nokta sayılarının toplamı çıkarılır. Elde edilen sonuç toplam nokta sayısına bölünür ve bölgelere göre sayım oranı elde edilir. BSO yöntemi ile elde edilen sayı, iki nicel değişken arasındaki ilişkinin yönüne ve gücüne dair bilgi vermektedir. Bölgelere göre sayım oranı;

$$BSO = \frac{(1 \text{ ve } 3. \text{ bölgedeki toplam nokta sayısı}) - (2 \text{ ve } 4. \text{ bölgedeki toplam nokta sayısı})}{\text{Toplam nokta sayısı}}$$

formülü ile hesaplanır.

İki nicel değişkenin ilişkililiğinde korelasyon katsayısı hesaplanırken aykırı değerlerin bu katsayıları etkileyeceği dikkate alınmalıdır.

Örneğin Tablo 1'deki verilerle A ve B nicel değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısı istatistik yazılımı ile hesaplandığında 0,473 sonucu çıkmaktadır. Buna göre A ve B nicel değişkenleri arasında yönü pozitif, gücü orta düzeyde olan bir ilişki bulunmaktadır. Tablo 2'de ise biri hariç bütün değerler, Tablo 1'deki bütün değerler ile aynı olmasına rağmen bir tane aykırı değerden (35) dolayı korelasyon katsayısı -0,028 çıkmaktadır. Dolayısıyla A ve B nicel değişkenleri arasındaki ilişkinin yönü negatif, gücü ise zayıf düzeyde çıkacaktır.

Tablo 1

A	B
5	4
6	5
7	6
4	7
3	3
7	6
5	4

Tablo 2

A	B
5	4
6	5
7	6
4	7
3	3
7	6
5	35

Yukarıdaki bilgilere göre bir veri setindeki aşırı büyük veya aşırı küçük aykırı değerler korelasyon katsayısını yanıltıcı şekilde artırabilir veya azaltabilir.

4. Örnek

Dünyada zeytin ve zeytinyağı üretiminde önemli bir yere sahip olan Türkiye, 2023 yılına göre zeytin üretimini yaklaşık % 150 artırarak 2024 yılında yaklaşık 3 milyon 750 bin tona ulaştı. Böylece Türkiye'deki zeytin üretimi Cumhuriyet tarihinin en yüksek seviyesine ulaşmıştır. Aşağıdaki tabloda 2008-2024 yılları arasındaki TÜİK verilerine göre Türkiye'deki zeytin ağacı sayıları ve zeytin üretim miktarları yaklaşık olarak verilmiştir.

	Zeytin Ağacı Sayısı			Zeytin Üretim Miktarı (ton)		
Yıl	Meyve Veren	Meyve Vermeyen	Toplam	Sofralık	Yağlık	Toplam
2008	106 139	45 491	151 630	512 103	952 145	1 464 248
2009	109 127	44 596	153 723	460 013	830 641	1 290 654
2010	111 398	45 050	156 448	375 000	1 040 000	1 415 000
2011	117 942	36 669	154 611	550 000	1 200 000	1 750 000
2012	120 821	36 240	157 061	480 000	1 340 000	1 820 000
2013	129 161	37 869	167 030	390 000	1 286 000	1 676 000
2014	140 712	28 285	168 997	438 000	1 330 000	1 768 000
2015	144 760	27 232	171 992	400 000	1 300 000	1 700 000
2016	147 430	26 355	173 785	430 000	1 300 000	1 730 000
2017	148 263	26 331	174 594	460 000	1 640 000	2 100 000
2018	151 069	26 774	177 843	426 995	1 073 472	1 500 467
2019	154 037	28 039	182 076	415 000	1 110 000	1 525 000
2020	159 382	27 781	187 163	513 140	803 486	1 316 626
2021	157 850	30 829	188 679	555 833	1 182 847	1 738 680
2022	163 035	31 484	194 519	938 217	2 037 783	2 976 000
2023	167 545	34 225	201 770	490 000	1 030 000	1 520 000
2024	172 575	32 413	204 988	1 166 318	2 583 682	3 750 000

(Genel ağdan alınmıştır.)

Buna göre

1. Verilen bilgileri ve tabloyu dikkate alarak iki nicel değişkenli veriye dayalı istatistiksel araştırma sorusunu yazınız.

Zeytin ağacı sayısı ve zeytin üretim miktarı veri dosyasına yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

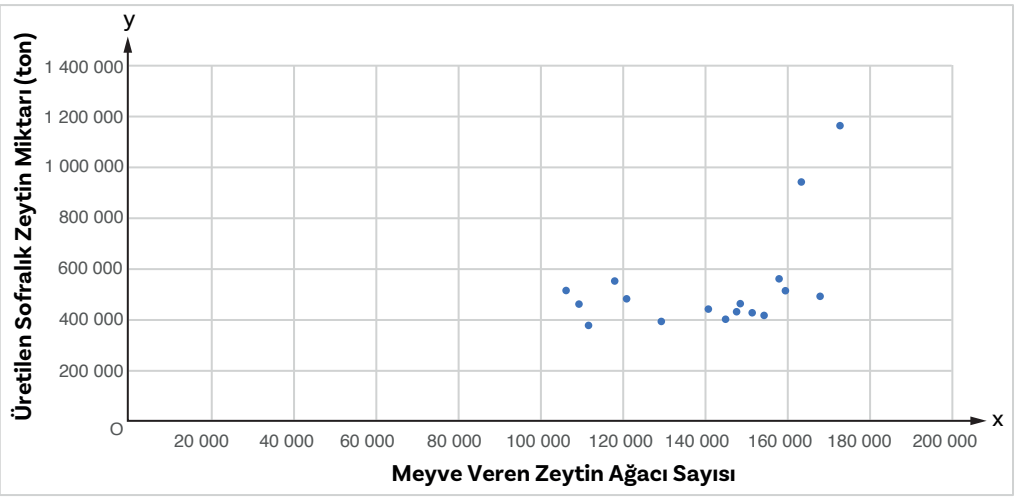
2. İstatistik yazılımı yardımı ile yazdığınız araştırma sorusuna göre nicel değişkenlere ait serpme diyagramını çiziniz.

3. BSO yöntemiyle korelasyon katsayısını hesaplayarak korelasyonun yönünü ve gücünü belirleyerek yorumlayınız.

Çözüm

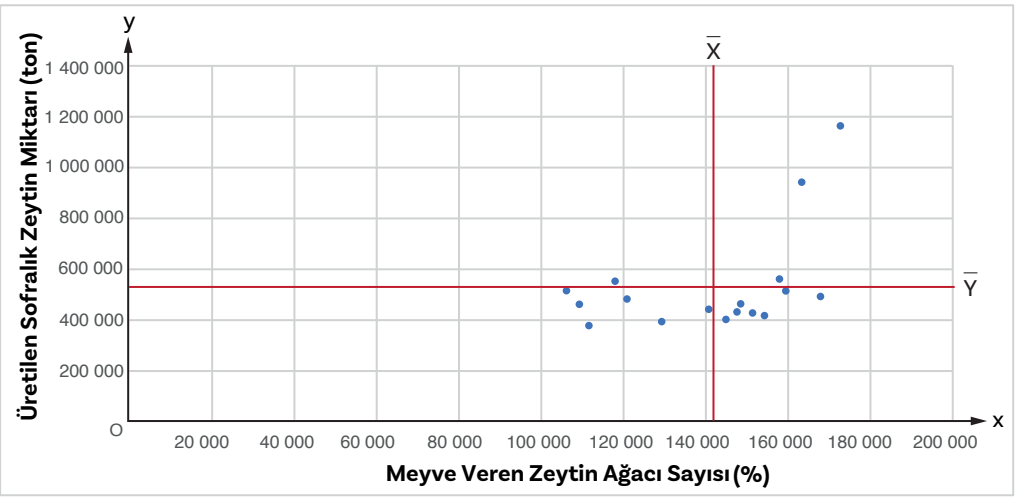
1. Verilen bilgiler ve tablodaki veriler dikkate alındığında birden çok istatistiksel araştırma sorusu yazılabilir. Bu sorulardan biri "Türkiye'de meyve veren zeytin ağacı sayısı ile üretilen sofralık zeytin miktarı arasında ilişki var mıdır?" sorusudur.

2. Tablodaki veriler istatistik yazılımına girildiğinde meyve veren zeytin ağacı sayısı ile üretilen sofralık zeytin miktarı nicel değişkenlerine ait serpme diyagramı aşağıdaki gibi oluşur (Grafik 1).



Grafik 1

3. Grafik 1'den yararlanarak BSO'yu hesaplamak için her iki değişkenin aritmetik ortalamalarına göre eksenler oluşturulur. Meyve veren zeytin ağacı verilerinin aritmetik ortalaması $\overline{X} = 141\,250$'dir. Üretilen sofralık zeytin miktarı verilerinin aritmetik ortalaması $\overline{Y} = 529\,448$'dir. Bu ortalamalar doğrultusunda dört bölgeye ayrılan veriler Grafik 2'de verilmiştir. Grafik 2'de dört bölgeye ayrılan serpme diyagramı incelendiğinde birinci bölgede 3, ikinci bölgede 1, üçüncü bölgede 6 ve dördüncü bölgede 7 veri olduğu görülmektedir.



Grafik 2

Grafik 2'de bölgelere ayrılan serpme diyagramındaki iki nicel değişkenli veriler, veri değerlerinin aritmetik ortalamadan büyük veya küçük olmasına göre kategorik değişkenler olarak da ele alınabilir. BSO, kategorik değişkene dönüştürülen her bir değişken için veri değerlerinin aritmetik ortalamadan büyük ya da küçük olmasına göre iki yönlü sıklık tablosu oluşturularak da incelenebilir.

Grafik 2'deki verilere ilişkin iki yönlü sıklık tablosu aşağıda verilmiştir.

		Meyve Veren Zeytin Ağacı Sayısı	
		Ortalamadan Küçük	Ortalamadan Büyük
Üretilen Sofralık Zeytin Miktarı	Ortalamadan Büyük	1	3
	Ortalamadan Küçük	6	7

Grafik 2'deki serpme diyagramında ya da iki yönlü sıklık tablosunda yer alan veriler

$$\text{BSO} = \frac{(\text{1 ve 3. bölgedeki toplam nokta sayısı}) - (\text{2 ve 4. bölgedeki toplam nokta sayısı})}{\text{Toplam nokta sayısı}}$$

formülünde yerine yazıldığında $\text{BSO} = \frac{(6+3)-(1+7)}{17} \approx 0{,}06$ olarak elde edilir. 0 ile 0,30 arasında çıkan BSO yaklaşık değeri iki durum hakkında bilgi vermektedir.

I. Durum

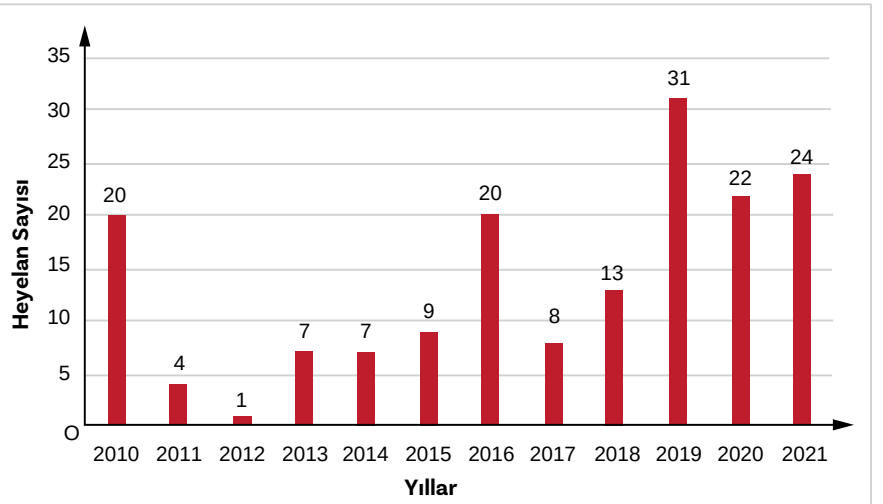
Yön (Pozitif): Türkiye'de meyve veren zeytin ağacı sayısı arttıkça üretilen sofralık zeytin miktarı da artmaktadır. Ya da meyve veren zeytin ağacı sayısı azaldıkça üretilen sofralık zeytin miktarı da azalmaktadır. Bu da iki değişkenin aynı yönde hareket ettiğini göstermektedir.

II. Durum

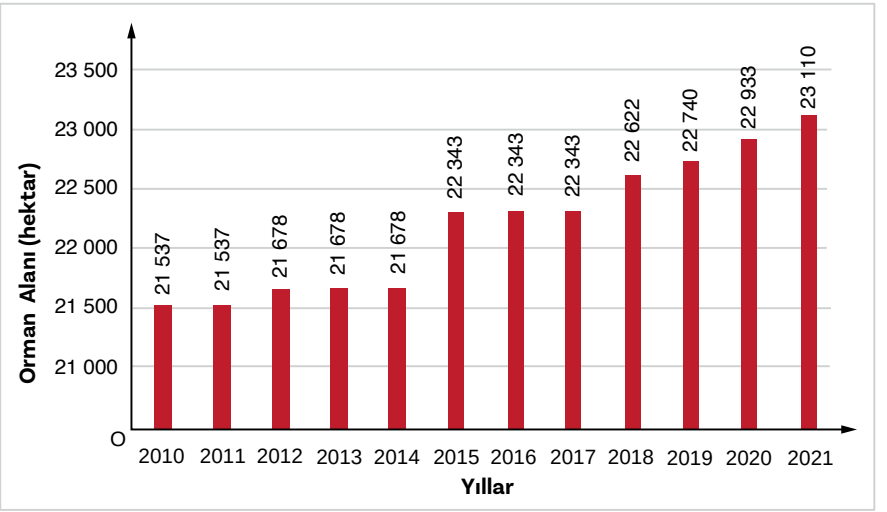
Güç (Zayıf Düzey): Bu ilişki zayıf düzeydedir. Bu da zeytin ağacı sayısı her arttığında zeytin miktarının da her zaman ve aynı oranda artmayabileceği anlamına gelir. Aralarında bir ilişki vardır ancak bu ilişki orta, güçlü veya mükemmel değildir.

5. Örnek

Bir araştırma şirketi yıllara göre Türkiye'nin orman varlığı ile meydana gelen heyelan sayısı arasındaki ilişkiyi incelemeyi amaçlamıştır. Bu doğrultuda şirket, güvenilir kaynaklardan elde ettiği verilerle Grafik 1 ve Grafik 2'yi oluşturmuştur.



Grafik 1



Grafik 2

(Genel ağdan alınmıştır.)

Buna göre

1. Grafik 1 ve Grafik 2'den yararlanarak orman alanı ve heyelan sayısının 2010-2021 yılları arasındaki verilerini tablo hâlinde yazınız.
2. Bu tablodan yararlanarak orman alanı ile heyelan sayısının 2010-2021 yılları arasındaki serpme diyagramını istatistik yazılımı yardımıyla çiziniz.
3. Orman alanının aritmetik ortalaması $\overline{X}$, heyelan sayısının aritmetik ortalaması $\overline{Y}$ olmak üzere $\overline{X}$ ile $\overline{Y}$ sayılarına göre çizilen eksenlerden yararlanarak serpme diyagramını dört bölgeye ayırınız. İki yönlü sıklık tablosunu kullanarak BSO'yu hesaplayınız.
4. Hesapladığınız BSO'ya göre orman alanı ile heyelan sayısı arasındaki ilişkinin (korelasyon) yönünü ve gücünü belirleyerek yorumlayınız.
5. Heyelan sayısının artmasının nedeni orman alanlarının artmasına bağlı mıdır? Yorumlarınızı yazınız.

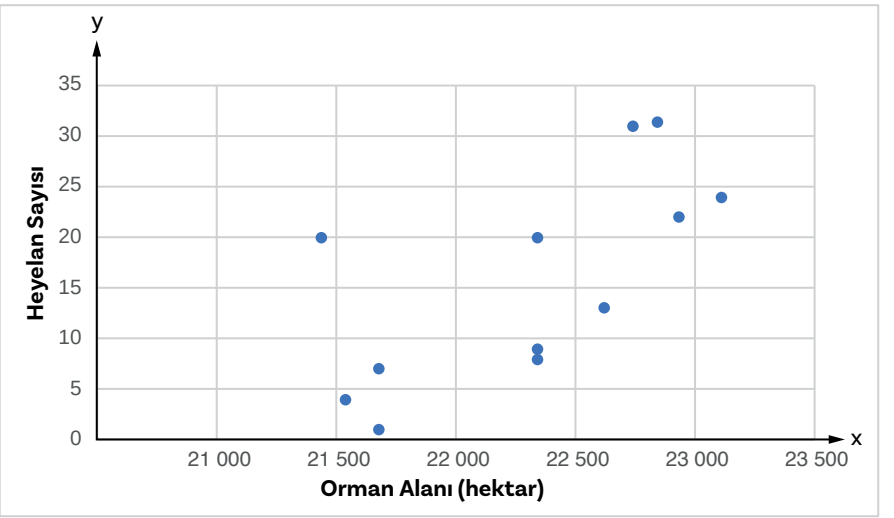
Çözüm

1. 2010-2021 yılları arasındaki orman alanı ile heyelan sayısı arasındaki ilişkiye dair veriler Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1

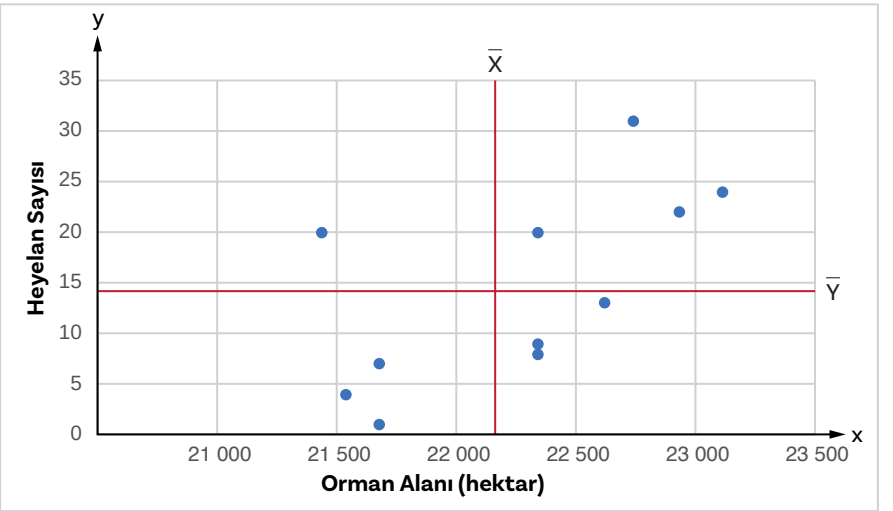
Yıllar	Orman Alanı (hektar)	Heyelan sayısı
2010	21 537	20
2011	21 537	4
2012	21 678	1
2013	21 678	7
2014	21 678	7
2015	22 343	9
2016	22 343	20
2017	22 343	8
2018	22 622	13
2019	22 740	31
2020	22 933	22
2021	23 110	24

2. Tablo 1'deki veriler kullanılarak istatistik yazılımıyla elde edilen 2010-2021 yılları arasındaki orman alanı ile heyelan sayısı arasındaki ilişkiyi gösteren serpme diyagramı aşağıda verilmiştir (Grafik 3).



Grafik 3

3. Grafik 3'ten yararlanarak BSO'yu hesaplamak için her iki değişkenin aritmetik ortalamalarına göre eksenler oluşturulur. Orman alanı aritmetik ortalaması $\overline{X} = 22\,212$'dir. Heyelan sayısının aritmetik ortalaması $\overline{Y} = 14$'tür. Bu ortalamalar doğrultusunda dört bölgeye ayrılan veriler Grafik 4'te verilmiştir.



Grafik 4

Grafik 4'te dört bölgeye ayrılan serpme diyagramı incelendiğinde birinci bölgede 5, ikinci bölgede 1, üçüncü bölgede 3, dördüncü bölgede 2 veri bulunduğu görülmektedir. Grafik 4'teki verilere ilişkin iki yönlü sıklık tablosu Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2

		Orman Alanı	
		Ortalamadan Küçük	Ortalamadan Büyük
Heyelan Sayısı	Ortalamadan Büyük	1	4
	Ortalamadan Küçük	3	3

Tablo 2'deki verilere göre BSO $= \dfrac{(4+3)-(1+3)}{11} \approx 0{,}27$ olarak bulunur.

4. Hesaplanan yaklaşık BSO değeri 0 ile 0,30 arasında çıktığından bu, iki durum hakkında bilgi vermektedir.

I. Durum

Yön (Pozitif): Türkiye'de orman alanı arttığında heyelan sayısında da artma, azaldığında ise heyelan sayısında azalma eğilimi görünür.

II. Durum

Güç (Zayıf düzey): Bu ilişki zayıf düzeydedir. Bu da orman alanı her arttığında heyelan sayısının da her zaman ve aynı oranda artmayabileceği anlamına gelir. Aralarında bir ilişki vardır ancak bu ilişki orta, güçlü veya mükemmel değildir.

5. Korelasyon, iki nicel değişken arasında ilişki olup olmadığını incelerken bu değişkenler arasında neden-sonuç ilişkisi olduğunu göstermez. Örneğin şiddetli ve sürekli yağan yağmurlar, karların erimesi gibi etkenler de heyelana neden olabilir. Dolayısıyla orman alanı miktarı arttıkça heyelan sayısı da artacaktır sonucuna varılamaz.

6. Örnek

Uyku; dış uyaranlara karşı bilincin, bütünüyle veya bir bölümünün yittiği, tepki gücünün zayıfladığı ve her türlü etkinliğin büyük ölçüde azaldığı dinlenme durumudur. İnsanların farklı yaş dönemlerinde farklı uyku sürelerine ihtiyacı olabilir. İzmir'de yaşayan insanların yaşları ilerledikçe uyku sürelerinin değişip değişmediğini merak eden bir lise öğrencisi farklı yaş gruplarında rastgele 16 kişi ile görüşmüş ve aşağıdaki tabloyu oluşturmuştur.

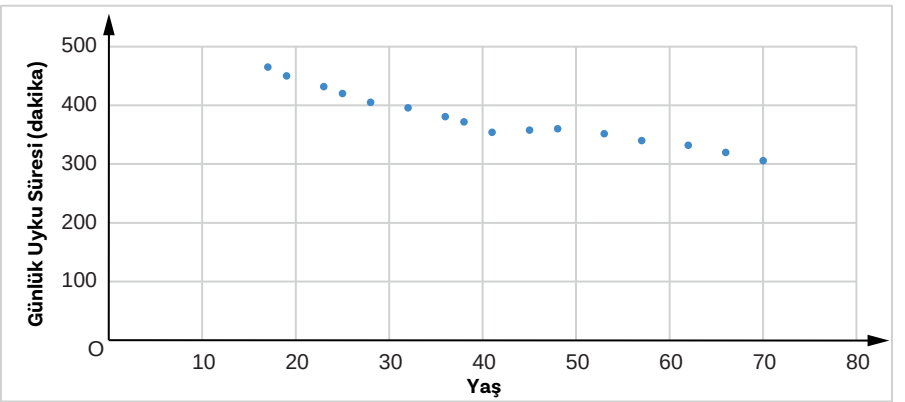
Yaş	17	19	23	25	28	32	36	38	41	45	48	53	57	62	66	70
Günlük Uyku Süresi (Dakika)	465	450	432	420	405	396	381	372	354	358	360	352	340	332	320	306

Buna göre

1. Tablodaki verilerden yola çıkarak istatistik yazılımı yardımıyla bazı yaş grupları ile bu yaş grubundaki kişilerin günlük uyku süreleri arasındaki ilişkiyi gösteren serpme diyagramını oluşturunuz.
2. Oluşturduğunuz serpme diyagramına göre ilişkinin yönünü ve gücünü tahmin ediniz.
3. İstatistik yazılımında korelasyon katsayısını hesaplayarak ilişkinin yönünü ve gücünü bulunuz. Elde ettiğiniz sonucu 2. maddedeki tahmininiz ile karşılaştırınız.

Çözüm

1. Tablodaki verilerden yararlanılarak istatistik yazılımı yardımıyla çizilen serpme diyagramı aşağıda verilmiştir.



2. İstatistik yazılımı yardımıyla x ekseni yaş gruplarını, y ekseni günlük uyku sürelerini (dakika) gösterecek şekilde çizilen bir serpme diyagramında kişilerin yaşları ilerledikçe günlük uyku sürelerinin azaldığı görülmektedir. Serpme diyagramına göre kişilerin yaşı ile uyku süreleri arasında negatif yönlü güçlü bir ilişki olduğu söylenebilir.
3. İstatistik yazılımından yararlanılarak korelasyon katsayısı $-0,967$ olarak bulunur. Dolayısıyla kişilerin yaşı ile uyku süreleri arasında negatif yönlü güçlü bir ilişki olduğu söylenebilir. Bu durumda 2. maddede yapılan tahminin doğru olduğu görülür.

7. Örnek

Altın; dayanıklı, doğada serbest halde bulunan, kolay işlenebilen ve ticari değeri olan kıymetli bir madendir. Ülkemizde altın üretimi ilk olarak Cumhuriyet döneminde resmî olarak 2001 yılında İzmir'in Bergama ilçesinde yer alan Ovacık altın madeninde başlamıştır. Başlangıçta 1,4 ton/yıl olan altın üretimi, yeni işletmeye alınan altın madenleri ile 2023 yılında 36,25 ton olarak gerçekleşmiştir.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Aşağıdaki tabloda Türkiye'de 2001-2023 yılları arasında üretilen yaklaşık altın miktarı (ton) ve aynı yıllar içerisinde altının yaklaşık ons değeri ($) verilmiştir.

Yıllar	Türkiye'nin Yaklaşık Altın Üretim Miktarı (Ton)	Altının Yaklaşık Ons Değeri ($)
2001	1	271
2002	4	309
2003	5	363
2004	5	409
2005	5	444
2006	8	603
2007	10	695
2008	11	872
2009	15	973
2010	17	1224
2011	24	1571
2012	29	1668

Yıllar	Türkiye'nin Yaklaşık Altın Üretim Miktarı (Ton)	Altının Yaklaşık Ons Değeri ($)
2013	34	1411
2014	31	1266
2015	28	1157
2016	24	1250
2017	23	1257
2018	28	1268
2019	39	1392
2020	42	1798
2021	39	1798
2022	31	1902
2023	36	1943

(Genel ağdan alınmıştır.)

Buna göre

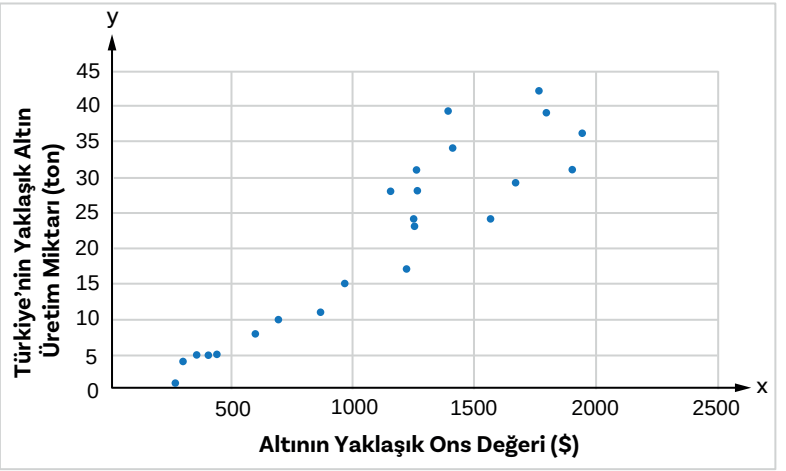
1. Tabloda verilenlerden yola çıkarak istatistik yazılımı yardımıyla 2001-2023 yılları arasında Türkiye'nin yaklaşık altın üretim miktarları ile altının yaklaşık ons değeri arasındaki ilişkiyi gösteren serpme diyagramını oluşturunuz.

Altın üretim miktarı ve altının yaklaşık ons değeri veri dosyasına yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

2. Oluşturduğunuz serpme diyagramı yardımıyla ilişkinin yönünü ve gücünü tahmin ediniz.
3. İstatistik yazılımında korelasyon katsayısını hesaplayarak ilişkinin yönünü ve gücünü belirleyiniz. Elde ettiğiniz sonucu 2. maddedeki tahmininiz ile karşılaştırınız.

Çözüm

1. Tabloda verilenlerden yararlanılarak istatistik yazılımı yardımıyla Türkiye'nin yaklaşık altın üretim miktarları ile altının yaklaşık ons değeri arasındaki ilişkiyi gösteren serpme diyagramı bir sonraki sayfada verilmiştir.



2. İstatistik yazılımı yardımıyla x ekseni altının yaklaşık ons değerini, y ekseni Türkiye'de üretilen altın miktarlarını gösterecek şekilde bir serpme diyagramı çizildiğinde altının ons değeri arttıkça Türkiye'de üretilen altın miktarlarının da arttığı görülmektedir. Serpme diyagramına göre ilişkinin pozitif yönlü ve güçlü bir ilişki olduğu söylenebilir.

3. İstatistik yazılımı kullanılarak korelasyon katsayısı 0,925 olarak bulunur. Dolayısıyla Türkiye'de üretilen yaklaşık altın miktarı ile altının yaklaşık ons değeri arasında pozitif yönlü ve güçlü bir ilişki olduğu söylenebilir. Bu durumda 2. maddedeki tahminin doğru olduğu görülür.

Sıra Sizde 4

Bir şirketin 2012-2024 yılları arasındaki ürün reklam giderleri ve satış miktarları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Yıllar	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Reklam Gideri (milyon ₺)	105	110	125	135	145	170	180	200	300	400	500	550	750
Satış Miktarı (bin adet)	9	12	15	16	16	18	15	18	27	36	45	50	67

Buna göre

1. **Tablodaki verilerden yola çıkarak istatistik yazılımı yardımıyla şirketin yıllara göre reklam giderleri ile satış miktarları arasındaki ilişkiyi gösteren serpme diyagramını oluşturunuz.**

Reklam giderleri ve satış miktarları veri dosyasına yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

2. **Oluşturduğunuz serpme diyagramı yardımıyla ilişkinin yönünü ve gücünü tahmin ediniz.**

3. **İstatistik yazılımında korelasyon katsayısını hesaplayarak ilişkinin yönünü ve gücünü bulunuz. Elde ettiğiniz sonucu 2. maddedeki tahmininiz ile karşılaştırınız.**

Sıra Sizde 5

Bir lise öğrencisi, elementlerin atomik ağırlığı ve yoğunluğu ile ilgili bir araştırma ödevi hazırlamaktadır. Araştırmanın sonucunda elementlerin atomik ağırlığı ve yoğunluğu ile ilgili aşağıdaki bilgilere ulaşmış ve bu bilgileri tablo hâline getirmiştir.

Atomik Ağırlık: Bir mol atomun kütlesine bağlı olarak yer çekimi altında sahip olduğu fiziksel ağırlıktır.

Yoğunluk: Belirli bir sıcaklık ve basınç altında birim hacimdeki madde miktarıdır. Atomun cinsi, atomun kütlesi, atomun yarıçapı gibi farklı özellikler yoğunluğu etkileyebilir.

Bazı elementlerin atomik ağırlığı (g/cm^3) ve yoğunluğu (g/cm^3) aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Element/Simge	Atomik Ağırlık (g/cm^3)	Yoğunluk (g/cm^3)
Lityum/Li	6,94	0,53
Karbon/C	12,01	2,26
Azot/N	14,00	1,25
Oksijen/O	15,99	1,42
Sodyum/Na	22,99	0,96
Alüminyum/Al	26,98	2,70
Silisyum/Si	28,08	2,33
Klor/Cl	35,45	3,21
Argon/Ar	39,94	1,78
Krom/Cr	51,99	7,14
Demir/Fe	55,84	7,87
Nikel/Ni	58,69	8,90
Kobalt/Co	59,93	8,90
Brom/Br	79,90	3,12
Kripton/Kr	83,79	3,75
Kalay/Sn	118,71	7,31
Antimon/Sb	121,76	6,69
Altın/Au	196,97	19,30

Verilen bilgileri ve tabloyu inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. **Karekoddaki verileri istatistik yazılımına girerek elementlerin atomik ağırlığı ile yoğunluğu arasında bir ilişki olup olmadığını, varsa bu ilişkinin hangi yönde olduğunu belirtiniz.**

Atomik ağırlık ve yoğunluk veri dosyasına yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

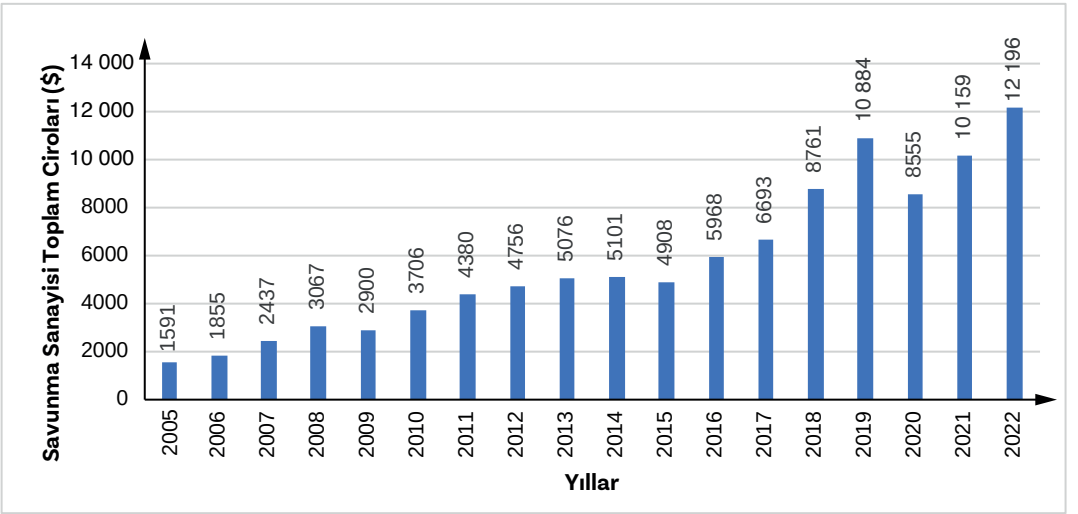
2. **Elementlerin atomik ağırlığı ile yoğunluğu arasında pozitif yönde bir ilişki ortaya çıkarsa "Elementlerin atomik ağırlığı arttıkça yoğunluğu da artar." şeklinde bir yorum yapılıp yapılamayacağını gerekçeleriyle açıklayınız.**

7. Uygulama

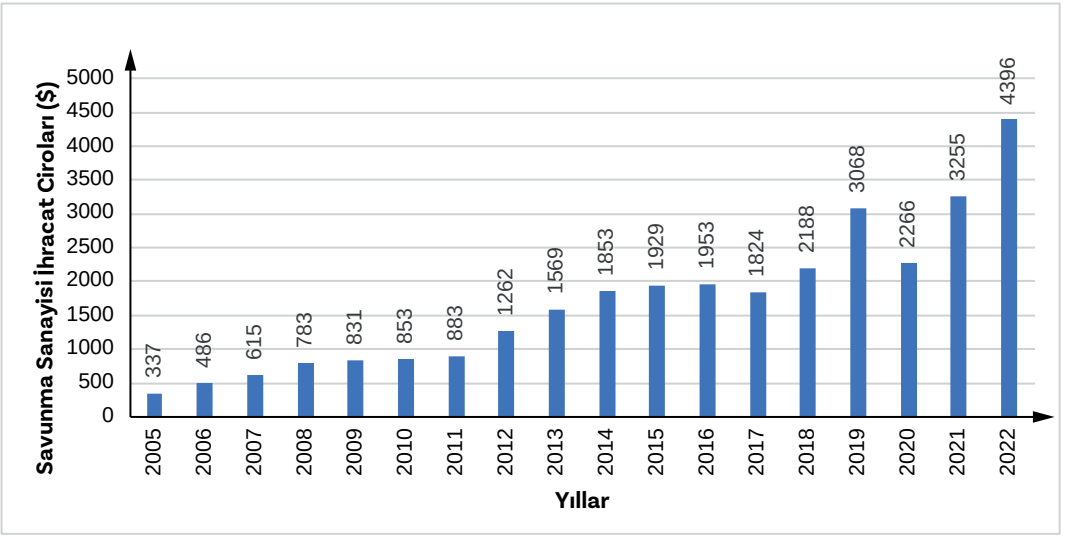
Veri Analizi Yapma ve Sonuçları Yorumlama-1

Savunma sanayi, uzun süren teknoloji ve ürün geliştirme süreçlerini içermekle birlikte yüksek miktarda AR-GE (Araştırma-Geliştirme) harcamaları gerektiren önemli bir sektördür.

Grafik 1'de bir ülkede yapılan araştırmada 2005-2022 yılları arasındaki savunma sanayisi toplam ciroları ($), Grafik 2'de ise yine aynı yıllar arasındaki savunma sanayisi ihracat ciroları ($) verilmiştir.



Grafik 1



Grafik 2

Verilen grafikleri inceleyen bir araştırmacı "Bu ülkenin savunma sanayisi toplam ciroları ile savunma sanayisi ihracat ciroları arasında bir ilişki var mıdır?" şeklinde bir araştırma sorusu oluşturmuştur.

Aşağıda istenilenleri gerçekleştirerek uygulamayı tamamlayınız.

1. Araştırma sorusunda kullanılan nicel değişkenlerin arasındaki ilişkinin analiz edilebilmesi için hangi görselleştirme ve/veya özetleme araçlarından faydalanılabileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışarak belirleyiniz.

2. Belirlediğiniz görselleştirme ve/veya özetleme aracını kullanarak bu ülkenin savunma sanayisi toplam ciroları ($) ile savunma sanayisi toplam ihracat ciroları ($) arasındaki ilişkiyi analiz ediniz. Nicel veriler arasındaki ilişkinin yönünü (pozitif/negatif) ve gücünü (zayıf/orta/güçlü/mükemmel) yorumlayınız.

3. 2. soruda yaptığınız yoruma dayanarak araştırma sorusuna yönelik bir sonuç cümlesi oluşturunuz. (Unutmayınız: Korelasyon, değişkenler arasında neden-sonuç ilişkisi olduğunu göstermez.)

4. Elde ettiğiniz sonuçları araştırma sorusu bağlamında yorumlayınız ve değerlendiriniz. Yaptığınız bu değerlendirmeleri sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız ve birbirinizin düşüncelerini nazik bir şekilde dinleyerek sonuçlarınızı karşılaştırınız.

8. Uygulama

Veri Analizi Yapma ve Sonuçları Yorumlama-2

Sayfa 27'deki 4. uygulamada grup arkadaşlarınızla topladığınız ve kaydettiğiniz verileri kullanarak aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz ve uygulamayı tamamlayınız.

1. Kaydettiğiniz verileri istatistik yazılımı yardımıyla açınız.

2. Belirlediğiniz istatistiksel araştırma sorularına cevap bulabilmek için uygun görselleştirme veya özetleme araçlarını seçerek verilerinizi analiz ediniz.

3. Analizleriniz doğrultusunda dördüncü uygulamada oluşturduğunuz araştırma sorularınızı belirsizlikleri dikkate alarak cevaplayınız.

4. Cevaplarınızı sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız. Ayrıca seçtiğiniz örneklem dağılımının tüm evrene genellenip genellenemeyeceğini elde ettiğiniz sonuçları dikkate alarak ifade ediniz.

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

8. Örnek

Büyükbaş ve küçükbaş hayvan yetiştiriciliği et, süt ve deri üretimi açısından hem dünya hem de Türkiye ekonomisinde önemli yer tutmaktadır. Son yıllarda büyükbaş ve küçükbaş hayvancılığa sağlanan devlet destekleri ile hayvan sayısı arasında pozitif bir ilişki gözlemlenmiştir. Aşağıdaki tabloda 2001-2024 yılları arasında Türkiye'de et için yetiştirilen bazı hayvan sayıları ve et üretim miktarları verilmiştir.

Yıllar	Büyükbaş (Manda Hariç)		Küçükbaş			
			Koyun		Keçi	
	Et İçin Yetiştirilen Hayvan Sayısı	Et Üretim Miktarı (Ton)	Et İçin Yetiştirilen Hayvan Sayısı	Et Üretim Miktarı (Ton)	Et İçin Yetiştirilen Hayvan Sayısı	Et Üretim Miktarı (Ton)
2001	2 832 912	493 763	12 450 811	225 555	3 135 214	57 537
2002	2 791 254	496 198	11 755 374	219 311	2 977 773	57 707
2003	2 683 401	489 377	11 052 075	204 441	2 889 651	56 820
2004	2 599 490	488 556	10 725 580	190 105	2 837 242	52 460
2005	2 558 207	491 560	10 731 398	190 539	2 801 617	50 492
2006	2 620 559	514 042	10 704 436	187 236	2 748 395	48 906
2007	2 713 989	549 513	10 792 554	191 428	2 755 379	50 712
2008	2 797 426	581 497	10 826 034	192 647	2 706 994	50 254
2009	2 826 190	608 183	10 477 951	188 496	2 487 218	46 240
2010	2 932 054	647 067	9 691 041	186 121	2 244 760	42 846
2011	3 126 378	710 652	10 700 807	210 171	2 391 246	44 840
2012	3 421 960	790 034	10 755 777	220 359	2 841 307	53 133
2013	3 457 477	798 784	11 194 725	236 186	3 273 444	59 532
2014	3 525 209	815 674	11 991 640	238 670	3 681 199	63 711
2015	3 706 346	862 098	12 808 697	249 863	4 097 340	69 757
2016	3 993 893	956 180	13 277 503	266 675	4 346 611	75 322
2017	4 334 034	1 093 841	13 244 903	262 825	4 346 713	77 794
2018	4 844 711	1 281 234	14 133 170	291 179	4 392 427	82 839
2019	4 856 517	1 330 169	14 546 576	316 170	4 513 264	87 126
2020	4 812 902	1 341 446	15 801 021	345 639	4 692 010	90 443
2021	5 134 441	1 460 719	17 125 163	385 933	4 907 371	94 555
2022	5 480 489	1 572 747	21 563 828	489 354	6 112 179	115 938
2023	5 811 698	1 670 606	25 437 813	569 066	6 753 478	128 989
2024	5 077 812	1 483 042	22 573 686	509 539	5 117 030	99 532

(Genel ağdan alınmıştır.)

Buna göre

1. Verilen bilgileri ve tabloyu dikkate alarak iki nicel değişkenli veriye dayalı istatistiksel araştırma sorusu yazınız. Oluşturduğunuz araştırma sorusuna cevap bulabilmek için uygun görselleştirme ve/veya özetleme araçlarını seçerek verileri analiz ediniz ve yorumunuzu yazınız.

Büyükbaş (manda hariç) ve küçükbaş veri dosyasına yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

2. Araştırma sorunuzdaki örneklem dağılımının tüm dünyaya genellenip genellenemeyeceğini ifade ediniz.

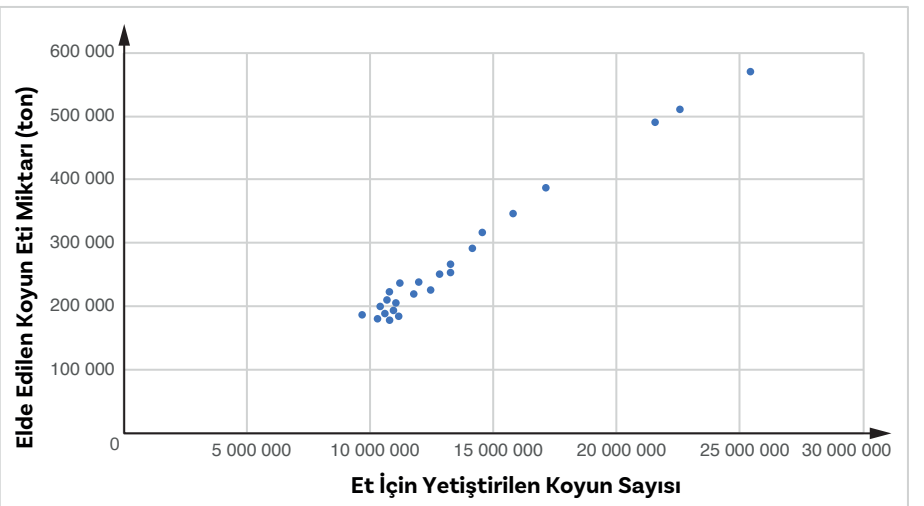
Çözüm

1. Verilen bilgiler ve tablo göz önüne alındığında birçok araştırma sorusu yazılabilir. Bu araştırma sorularından bazıları aşağıda verilmiştir.

   - Türkiye'de et için yetiştirilen koyun sayısı ile elde edilen koyun eti miktarı arasında bir ilişki var mıdır?
   - Türkiye'de et için yetiştirilen büyükbaş hayvan sayısı ile elde edilen büyükbaş hayvan eti miktarı arasında bir ilişki var mıdır?
   - Türkiye'de büyükbaş hayvan eti üretim miktarı ile elde edilen keçi eti miktarı arasında bir ilişki var mıdır?

   Burada "Türkiye'de et için yetiştirilen koyun sayısı ile elde edilen koyun eti miktarı arasında bir ilişki var mıdır?" şeklindeki istatistiksel araştırma sorusu analiz edilecektir.

   İki nicel değişkenli veriye dayalı araştırma sorusunu analiz ederek yorumlamak için görselleştirme aracı olarak serpme diyagramı, özetleme aracı olarak da korelasyon katsayısı kullanılabilir. Tablodaki veriler istatistik yazılımına girildiğinde et için yetiştirilen koyun sayısı ile elde edilen et miktarı arasındaki ilişkiyi gösteren aşağıdaki serpme diyagramı oluşur.

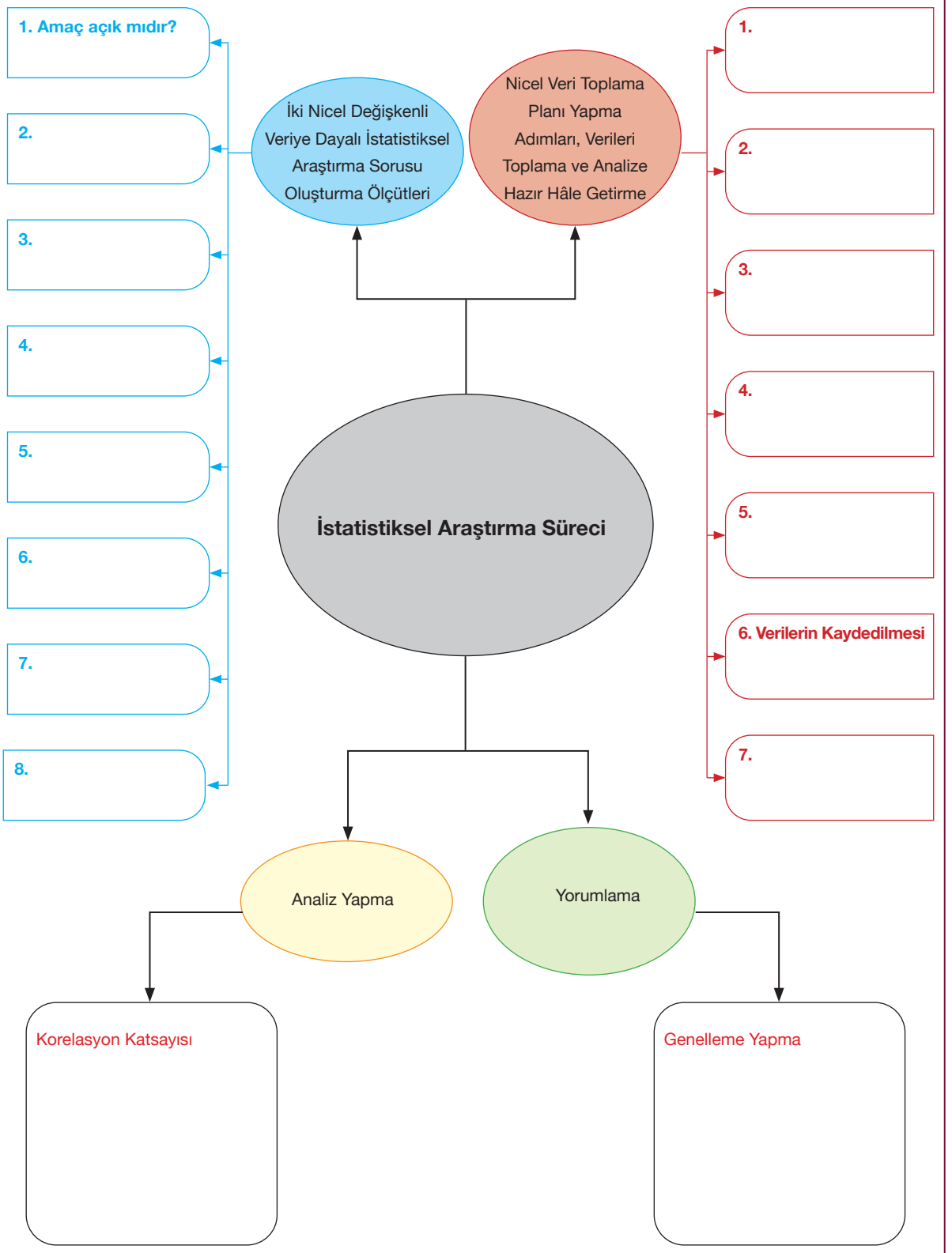


   Serpme diyagramı incelendiğinde ilişkinin pozitif yönlü ve güçlü bir ilişki olduğu söylenebilir. Ayrıca istatistik yazılımı yardımıyla aynı verilerin korelasyon katsayısı hesaplandığında 0,993 olduğu görülür. Dolayısıyla Türkiye'de et için yetiştirilen koyun sayısı ile elde edilen koyun eti miktarı arasında pozitif yönlü ve güçlü bir ilişki vardır.

2. Araştırma sorunuzun evreni ve kullanılan veriler Türkiye'ye ait olduğundan elde edilen sonuçlar tüm dünyaya genellenemez.

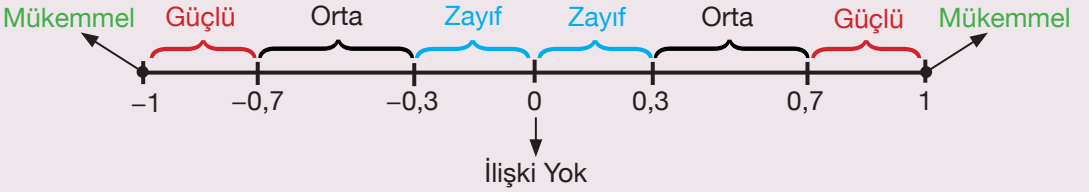
Sıra Sizde 6

İstatistiksel araştırma sürecine yönelik hazırlanmış olan aşağıdaki şemayı örneklerdeki gibi doldurunuz.



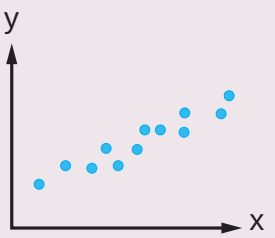
Kontrol Noktası

- Korelasyon katsayısı (r), korelasyonun yönünü ve gücünü gösterir.

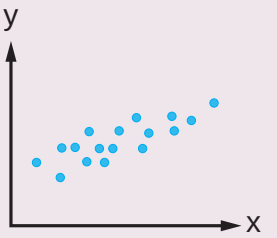


- İki nicel değişken arasındaki ilişkinin serpme diyagramına göre korelasyonun yönü ve gücü aşağıdaki gibi yorumlanabilir.

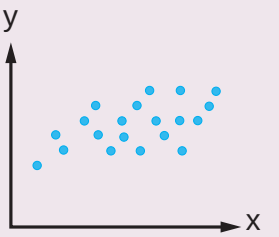
Pozitif Korelasyon



Güçlü İlişki
$0,70 \leq r < 1$

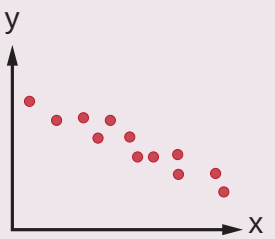


Orta İlişki
$0,30 \leq r < 0,70$

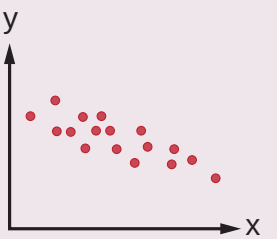


Zayıf İlişki
$0 < r < 0,30$

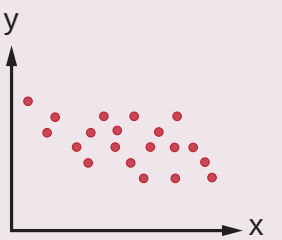
Negatif Korelasyon



Güçlü İlişki
$-1 < r \leq -0,70$

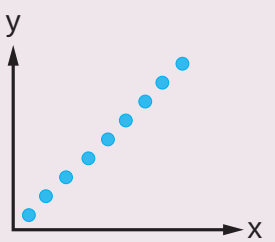


Orta İlişki
$-0,70 < r \leq -0,30$



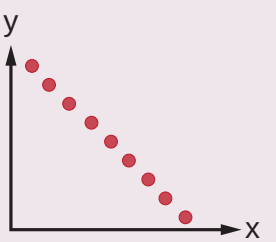
Zayıf İlişki
$-0,30 < r < 0$

Pozitif Mükemmel İlişki



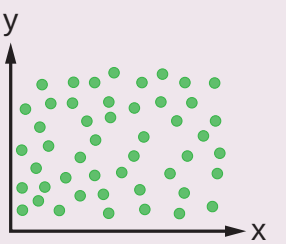
$r = 1$

Negatif Mükemmel İlişki



$r = -1$

İlişki Yok



$r = 0$

Performans Görevi

Adı: İki Nicel Değişken Arasındaki İlişkililiğe Odaklanan İstatistiksel Araştırma Süreçleri

Beklenen Performans: İki nicel değişken arasındaki ilişkililiğe odaklanan istatistiksel araştırma süreçlerinin bütününü değerlendirme

Görev: Bu görevde iki nicel değişken arasındaki ilişkililiğe odaklanan istatistiksel araştırma süreçlerinin bütününü değerlendirmeniz ve bu çalışmayla ilgili bir dosya hazırlayarak sunum yapmanız istenmektedir.

Yönerge:

Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz.

- Gruplara ayrılarak görev basamaklarını ve çalışma takvimini içeren bir çalışma planı oluşturunuz.
- Her grup için bir grup sözcüsü belirleyiniz.
- Çalışmanızı öğretmeninizin belirlediği sürede tamamlayınız.

Bunun için aşağıdaki bilgileri inceleyiniz.

Türkiye'nin küresel ölçekteki en büyük projelerinden biri olan görseldeki İstanbul Havalimanı, sadece İstanbul ve Türkiye için değil tüm dünya için önemli bir merkez olmuştur.



İstanbul Havalimanı'nın birinci bölümünün tamamlanmasıyla sağladığı mevcut istihdam sayısı, Türkiye ekonomisine önemli bir katkı sunmaktadır. Yapılan araştırmalara göre 2018 yılında hizmete açılan İstanbul Havalimanı'nın, Türkiye ekonomisine doğrudan ve dolaylı katkısı 24,2 milyar dolara ulaşarak millî gelirin %2,2'sini oluşturmuştur. Bu oranın 2030 yılında %3,25'e ulaşması ve istihdamın 472 bine ulaşması beklenmektedir.

Ayrıca jeopolitik konumu sayesinde uluslararası bir havacılık merkezi olma özelliği taşıyan İstanbul Havalimanı, 27 Temmuz 2025'te 272 132 yolcuya hizmet vererek Avrupa'nın günlük yolcu taşıma rekorunu kırmıştır. 2025 yılına kadar yaklaşık 350 milyon yolcuya ev sahipliği yapan İstanbul Havalimanı'nın tam kapasiteye ulaştığında yılda 200 milyon yolcuya ulaşım imkânı sunması beklenmektedir.

Aşağıda yer alan tabloda İstanbul Havalimanı'nda 2018-2024 yılları arasında taşınan yolcu sayıları verilmiştir.

Yıllar	İç Hat Yolcu Sayısı		Dış Hat Yolcu Sayısı		Toplam Yolcu Sayısı
	Gelen	Giden	Gelen	Giden	
2018	32 634	32 272	15 019	15 180	95 105
2019	6 298 551	6 276 090	19 669 835	19 764 744	52 009 220
2020	3 712 656	3 716 219	7 896 910	8 039 595	23 365 380
2021	5 364 622	5 311 615	13 286 250	13 219 240	37 181 727
2022	8 002 126	7 964 376	24 081 262	24 488 309	64 536 073
2023	8 922 294	8 818 471	28 850 582	29 420 460	76 011 807
2024	8 726 372	8 667 438	31 375 609	31 661 321	80 430 740

(Genel ağdan alınmıştır.)

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz.

- İki nicel değişkenli veriye dayalı bir istatistiksel araştırma sorusu oluşturunuz.
- Oluşturduğunuz araştırma sorusunu araştırma sorularında bulunması gereken ölçütler doğrultusunda değerlendiriniz.
- İki nicel değişkenli veriye dayalı veri toplama planınızı oluşturunuz.
- Oluşturduğunuz veri toplama planı ve elde ettiğiniz sonuçlar doğrultusunda iki nicel değişkenli veriye dayalı araştırma sorunuz için istatistik yazılımından yararlanarak serpme diyagramını çiziniz ve araştırma sorunuzu yorumlayınız.
- Sunumunuzu iki nicel değişken arasındaki ilişkililiğe odaklanan istatistiksel araştırma süreçlerinin bütününü değerlendirmek için grup arkadaşlarınızla oluşturduğunuz araştırma sorunuza verdiğiniz cevaplara göre hazırlayınız.

Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz.

- Oluşturduğunuz sunuyu sınıfınızda arkadaşlarınızla paylaşınız.
- Tamamladığınız çalışmayı öğretmeninize teslim ediniz.

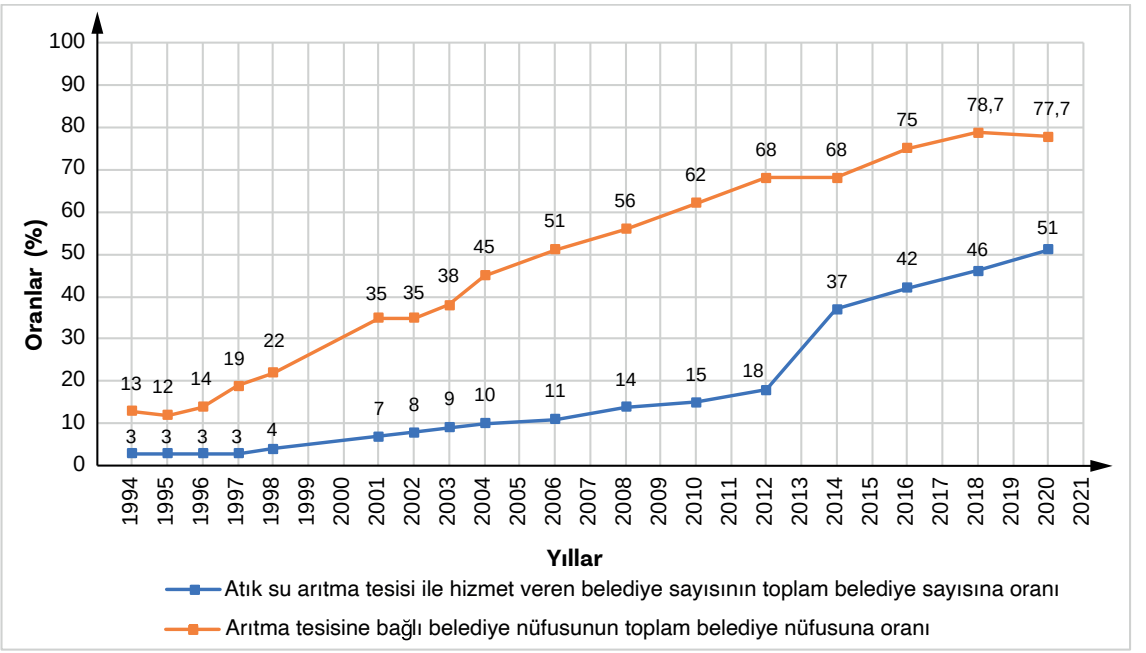
Değerlendirme: Performans göreviniz plan oluşturma, çözümlerin doğruluğu, etkili sunum yapma ve dosyayı zamanında teslim etme ölçütlerine göre öğretmeniniz tarafından analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Ek soruların yer aldığı 2. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Korelasyon, bölge sayım oranı)

Alıştırmalar

1. Atık suların arıtılması, suyun daha verimli kullanılması ve mevcut kaynakların korunması adına önemli bir uygulamadır. Türkiye, bu alanda da önemli yatırımlar yapmaktadır. Aşağıdaki grafikte atık su arıtma tesisi ile hizmet veren belediye sayısının toplam belediye sayısına oranı ve arıtma tesisine bağlı belediye nüfusunun toplam belediye nüfusuna oranının yaklaşık değerleri verilmiştir.



(Genel ağdan alınmıştır.)

Grafik incelendiğinde atık su arıtma tesisi ile hizmet veren belediye sayısının toplam belediye sayısına oranı 1994 yılında yaklaşık %3 iken 2020 yılında yaklaşık %51'e ulaşmıştır. Aynı yıllar arasında atık su arıtma tesisleri ile hizmet veren belediye nüfusunun toplam belediye nüfusuna oranı ise yaklaşık %13'ten %77,7'ye ulaşmıştır.

Buna göre

a) Bu grafikteki verilerden ve istatistik yazılımından yararlanarak atık su arıtma tesisi ile hizmet veren belediye sayısının toplam belediye sayısına oranı ile arıtma tesisine bağlı belediye nüfusunun toplam belediye nüfusuna oranı arasındaki ilişkiyi gösteren bir serpme diyagramı çiziniz.

Atık su arıtma veri dosyasına yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

b) Atık su arıtma tesisi ile hizmet veren belediye sayısının toplam belediye sayısına oranı ortalaması $\overline{X}$, arıtma tesisine bağlı belediye nüfusunun toplam belediye nüfusuna oranı ortalaması $\overline{Y}$ olmak üzere $\overline{X}$ ve $\overline{Y}$ sayılarına göre çizilen eksenler yardımıyla diyagramı dört bölgeye ayırınız ve iki yönlü sıklık tablosundan yararlanarak BSO'yu hesaplayınız.

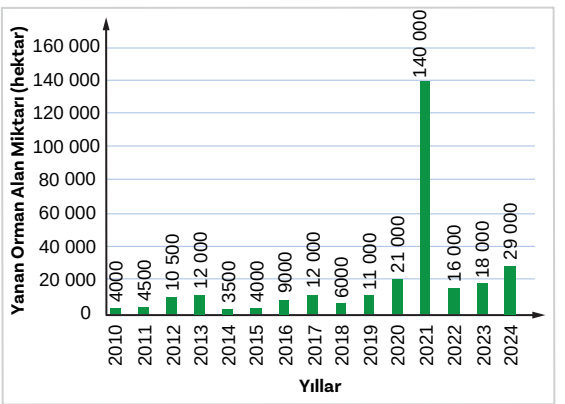
c) Atık su arıtma tesisi ile hizmet veren belediye sayısının toplam belediye sayısına oranı ile arıtma tesisine bağlı belediye nüfusunun toplam belediye nüfusuna oranı arasındaki ilişkinin yönünü ve gücünü bulunuz.

2.

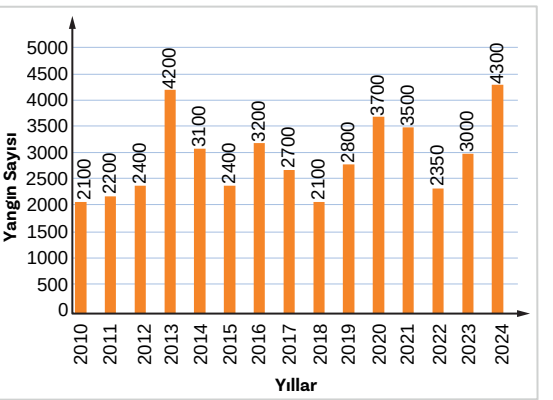


Ortaöğretim Genel Müdürlüğü tarafından 2025-2026 eğitim öğretim yılının ilk haftasında doğa sevgisini pekiştirmek, çevreye karşı sorumluluk bilincini güçlendirmek ve "Yeşil Vatan" farkındalığını artırmak amacıyla çeşitli etkinlikler gerçekleştirilmiştir. Genel Müdürlük tarafından "İlk dersim: orman yangınlarına karşı Yeşil Vatan'ı korumak" temalı ders planı ve öğretim materyali hazırlanmış ve ders materyalinin kapağı için de yandaki görsel kullanılmıştır. Materyal kapağını derste öğrencilerine gösteren bir öğretmen öğrencilerine "Yeşil Vatan" kavramı ve orman yangınları ile ilgili fikirlerini sormuş, öğrencilerden gelen fikirler doğrultusunda Türkiye'deki yangın sayısını ve yanan alan miktarını araştırmak istemişlerdir.

Bunun için T.C. Tarım ve Orman Bakanlığının verilerine ulaşarak 2010-2024 yılları arasındaki yanan orman alanı miktarı (hektar) için Grafik 1'i ve yangın sayısı için Grafik 2'yi oluşturmuşlardır.



Grafik 1



Grafik 2

Buna göre

a) Verilen bilgileri ve grafikleri dikkate alarak iki nicel değişkenli veriye dayalı istatistiksel araştırma sorunuzu yazınız.

b) Oluşturduğunuz araştırma sorusuna cevap bulabilmek için uygun görselleştirme ve/veya özetleme araçlarını seçiniz, verileri analiz edip yorumunuzu yazınız.

1.2. BAŞKALARI TARAFINDAN OLUŞTURULAN İKİ NİCEL DEĞİŞKENLİ VERİLERİ İNCELEME

Konuya Başlarken

TÜBİTAK Bilim Fuarı'na katılmak isteyen 11. sınıf öğrencisi Cavit, gazete kupüründe okuduğu "Gelişim çağındaki bireylerde sosyal medya kullanımının sosyalleşmeye ve akademik başarıya etkileri" ile ilgili aşağıdaki paragrafı proje raporuna eklemiştir.

> Gelişim çağındaki bireyler arasında yaygın olarak kullanılan sosyal medya iletişiminin birçok olumsuz yönü vardır. Bunlardan birisi de kişinin sosyal medya platformlarında uğrayabileceği siber zorbalıktır. Kişi tanıdığı veya tanımadığı kişilerden olumsuz yorumlar alabilir. İsteği dışında kendisine ait bilgiler paylaşılabilir. Sosyal medya kişilerde yabancılaşma ve yalnızlık olgusunu ortaya çıkarır. Yüz yüze iletişimin azalması ve sanal ağlar üzerinden birbirini sürekli gören insanların birbirleriyle konuşmak için zaman ayırmamaları; sosyal medya üzerinden sürekli haberleşme sağlıyormuş gibi görünseler de geniş açıdan bakıldığında gelişim çağındaki bireylerin hayatlarını olumsuz etkilemektedir. Bunun yanında sosyal medyanın normalden fazla kullanımı gelişim çağındaki bireylerde özellikle boyun kaslarında ağrı, omurga sağlığında bozulma, kol ve parmaklarda uyuşma gibi fiziksel şikâyetlere de neden olmaktadır. Yoğun bir şekilde sosyal medya kullanan gelişim çağındaki bireylerin hem sosyal hayatları hem de fiziksel sağlıkları etkilendiği için akademik başarılarında da düşüş olabilmektedir.

İstatistiksel araştırma süreci aşamalarını dikkate alarak Cavit'in raporunda yer alan bu ifadeleri elde etme yöntemini ve yukarıdaki paragrafta yer alan çıkarımları eleştirel bir bakış açısıyla değerlendiriniz. Aşağıdaki sorularla ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. **Cavit raporunda yer alan bu bilgilere ulaşırken nelere dikkat etmelidir?**

2. **Rapordaki hangi bilgilerin ayrıntılı bir şekilde verilmesi gerekir?**

Günlük yaşamda gazete, dergi, dijital platformlar ve sosyal medya gibi farklı kaynaklarda birçok istatistiksel bilgi ile karşılaşılabilir. Ancak karşılaşılan bu bilgilerin ne kadarının doğru olduğu, hata içerip içermediği ve taraflı bir şekilde sunulup sunulmadığı dikkatlice incelenmelidir. İstatistiksel verilere eleştirel bir bakış açısı ile yaklaşılmazsa hem bireyler hem de toplum yanlış yönlendirilebilir. Bu nedenle karşılaşılan istatistiksel bilgileri sorgulamak ve doğruluğunu araştırmak, yanıltıcı olabilecek bilgilerden kaçınılmasına yardımcı olacaktır.

9. Uygulama

İş Deneyimi ve Gelir Düzeyi Arasındaki İlişki

Lise öğrencisi olan Burak ve Buğra arasında geçen iş deneyimi ile gelir düzeyi arasındaki ilişkiye dair konuşma aşağıda verilmiştir.

Burak: Gelir düzeyinin yüksek olması için önemli olan hangi işte çalıştığın değil aynı işte kaç yıl çalıştığındır.

Buğra: Bu sonuca nasıl vardın?

Burak: Sınıfta 20 kişi ile konuştum. 18 tanesi "Aynı işte ne kadar uzun süre çalışırsan gelir seviyen o kadar artar." dedi. 2 kişi ise "Hangi işte çalıştığın daha önemli." dedi.

Aşağıda istenilenleri gerçekleştirerek uygulamayı tamamlayınız.

1. İstatistiksel araştırma süreci aşamalarını göz önünde bulundurarak Burak ve Buğra arasında geçen konuşmayı inceleyiniz. Burak'ın iş deneyimi ve gelir düzeyi tahmininin dayanağı nedir?

2. Burak'ın verilerinin doğruluğu ve güvenilirliği konusunda neler düşünüyorsunuz? Bu tür araştırmalarda güvenilirlik nasıl artırılabilir? Sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

3. Buğra, Burak'a hangi veri veya analizleri gösterirse Burak'ın iddiasını çürütmüş veya güçlendirmiş olur? Açıklayınız.

10. Uygulama

Bazı Ülkelerin Yaş ve Kuru Çay Üretim Miktarı ile Çay Verimi Miktarı Arasındaki İlişki

Bir araştırmacı, bazı ülkelerdeki yaş ve kuru çay üretim miktarı (bin ton) ile çay verimi miktarı (kilogram/dekar) arasındaki ilişkiyi araştırmak için 2017-2022 yılları arasındaki verileri gösteren Tablo 1, Tablo 2 ve Tablo 3'ü kullanarak istatistiksel araştırma süreçlerini takip edecektir.

Bazı ülkelerde 2018-2022 yılları arasındaki yaklaşık yaş çay üretim miktarı (bin ton) Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1

Ülkeler	Yıllara Göre Yaş Çay Üretim Miktarı (bin ton)				
	2018	2019	2020	2021	2022
Çin	11 800	12 600	12 747	13 757	14 531
Hindistan	5820	6044	5485	5864	5969
Kenya	2143	1995	3050	3050	2326
Sri Lanka	1500	1490	1500	1800	1400
Türkiye	1481	1407	1418	1450	1300
Vietnam	1081	1018	1065	1091	1117
Endonezya	610	560	626	599	595
Bangladeş	340	394	412	410	440
Arjantin	360	362	335	336	355
Uganda	323	262	390	400	326
Diğer	1558	1522	1492	1508	1402

Bazı ülkelerde 2017-2021 yılları arasındaki yaklaşık kuru çay üretim miktarı (bin ton) Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2

Ülkeler	Yıllara Göre Kuru Çay Üretim Miktarı (bin ton)				
	2017	2018	2019	2020	2021
Çin	2460	2610	2777	2932	3164
Hindistan	1325	1339	1390	1262	1349
Kenya	440	493	459	570	538
Sri Lanka	308	304	300	278	299
Türkiye	260	296	282	284	290
Diğer	942	967	934	1137	1167

Bazı ülkelerde 2018-2022 yılları arasındaki yaklaşık çay verimi miktarı (kilogram/dekar) Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3

Ülkeler	Yıllara Göre Çay Verimi Miktarı (kilogram/dekar)				
	2018	2019	2020	2021	2022
Türkiye	1895	1791	1699	1763	1563
Zimbabve	1433	1444	1438	1443	1448
Malavi	1183	1204	1200	1211	1222
Arjantin	909	1061	1016	1008	1019
Hindistan	936	964	985	1001	1016
Vietnam	927	943	972	981	995
Brezilya	985	973	971	975	972
Moritus	1228	1270	765	752	964
Kenya	907	741	1132	1221	927
Uganda	884	922	918	922	926

Dünyada yaş çay üretiminde ilk sırada 14,5 milyon ton ile Çin yer almaktadır. Çin'i yaklaşık 6 milyon ton ile Hindistan, 2,3 milyon ton ile Kenya, 1,4 milyon ton ile Sri Lanka ve 1,3 milyon ton ile Türkiye takip etmektedir. 2017-2021 dönemini kapsayan beş yılda dünyada kuru çay üretim miktarı ise yaklaşık %19 artarak 2021 yılında 6,8 milyon tona yükselmiştir. 2022 yılında çay verimi miktarında Türkiye'nin 1563 kg/dekar ile ilk, Zimbabve'nin 1448 kg/dekar ile ikinci, Malavi'nin 1222 kg/dekar ile üçüncü sırada yer aldığı görülmektedir.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Araştırmacı, tablolardan ve verilen bilgilerden yararlanarak aşağıdaki sonuçlara ulaşmıştır.

a) Türkiye'de yaş çay üretim miktarı ile kuru çay üretim miktarı arasında pozitif yönlü ve güçlü bir ilişki vardır.

b) Türkiye'de yaş çay üretim miktarı ile çay verimi miktarı arasında negatif yönlü ve orta düzeyde bir ilişki vardır.

c) Çin'de kuru çay üretim miktarı arttıkça çay verimi miktarı da artmıştır.

ç) Kenya'da yaş çay üretim miktarı ile çay verimi miktarı arasında bir ilişki yoktur.

Aşağıdaki istenilenleri gerçekleştirerek uygulamayı tamamlayınız.

1. İstatistiksel bilgilerinizi kullanarak araştırmacının ulaştığı sonuçların doğruluğunu her madde için ayrı ayrı değerlendirerek aşağıdaki boşluklara yazınız.

a)

b)

c)

ç)

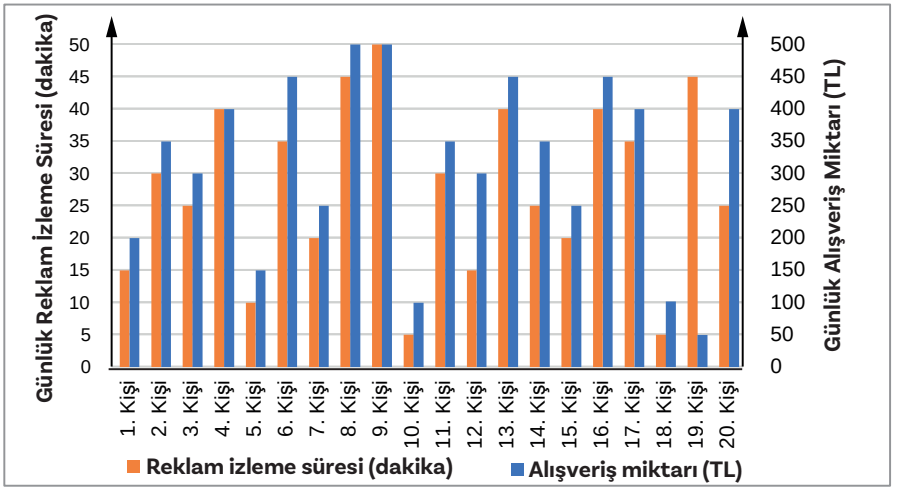
2. Tespit ettiğiniz hatalar veya yanlılıklar varsa bunları çürütmek için neler yapabileceğinizi sınıf arkadaşlarınızla tartışınız. Bu süreçte verilerin doğru ve objektif değerlendirilmesinin önemiyle yanlılığın yol açabileceği olumsuz sonuçların dikkate alınmasına özen gösteriniz.

Ek soruların yer aldığı 3. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Başkaları tarafından oluşturulan verilerin yorumlanması)

Başkaları tarafından oluşturulan verilerin yorumlanmasını içeren Çalışma Kâğıdı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

9. Örnek

Yeni kurulan bir e-ticaret firması diğer firmalar ile rekabet etmek ve sosyal medya reklamlarının müşterilerin alışveriş tercihleri üzerindeki etkisini görmek istemiştir. Firma bu amaçla bir araştırma şirketine başvurmuştur. Araştırma şirketi, rastgele seçilmiş 20 kişi ile görüşmüştür. Kişilerin günlük reklam izleme süreleri (dakika) ve alışveriş miktarları (TL) ile ilgili aşağıdaki grafik hazırlanmıştır.



Buna göre

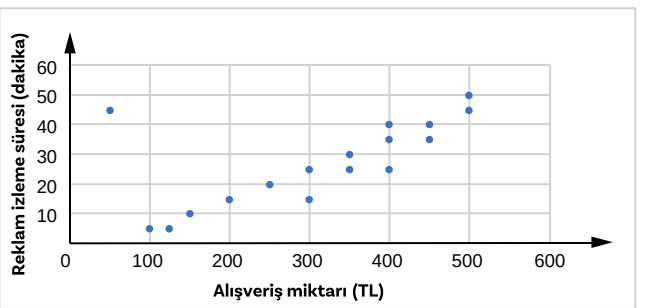
1. Bu e-ticaret firması, satış miktarını artırmak için reklam vermeye karar vermiştir. Firmanın vermiş olduğu bu kararın doğruluğunu istatistiksel ölçütler kullanarak değerlendiriniz.

Reklam izleme süresi ve alışveriş miktarı veri dosyasına yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

2. 19. kişi uzun süre reklam izlemesine rağmen çok az alışveriş yapmıştır. 19. kişinin verilerine bakılarak reklam izleme süresi ile alışveriş miktarı arasındaki ilişkiye karar verilebilir mi? Fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

Çözüm

İki nicel değişken arasındaki ilişkiye karar vermek için serpme diyagramı çizilerek korelasyon katsayısına bakılması gerekir. Grafikteki verilerin istatistik yazılımından yararlanılarak korelasyon katsayısı hesaplandığında 0,694 bulunur. Serpme diyagramı çizildiğinde ise aşağıdaki grafik ortaya çıkar.



1. Hem korelasyon katsayısından hem de serpme diyagramından reklam izleme süresi ile alışveriş miktarı arasında pozitif bir ilişki olduğu görülmektedir. Bu durumda e-ticaret firması doğru bir karar vermiştir.
2. Reklam izleme süresi ile alışveriş miktarı arasında pozitif bir ilişki olsa da 19. müşteri gibi bazı müşteriler, günlük olarak uzun süre reklam izlemesine rağmen çok düşük miktarda alışveriş yapabilir. Dolayısıyla iki nicel değişken arasındaki ilişkiye sadece bir kişinin verisine bakılarak karar verilemez.

Alıştırmalar

1. Bir grup lise öğrencisi Türkiye'deki telefon görüşmesi verilerini araştırmak istemiş ve TÜİK'in genel ağ sitesinden Türkiye'de 2015-2024 yılları arasındaki telefon görüşme verilerini içeren aşağıdaki tabloyu oluşturmuştur.

Yapılan Aramalar (dk.) / Yıllar	Sabit Hattan Mobil Hatta	Sabit Hattan Sabit Hatta	Mobil Hattan Sabit Hatta	Mobil Hattan Mobil Hatta
2015	3 719 070	7 268 614	10 312 288	91 877 837
2016	3 446 624	5 506 308	10 393 817	105 592 117
2017	3 363 727	3 834 098	10 019 650	115 425 236
2018	3 237 604	3 199 396	9 832 705	122 996 136
2019	3 261 625	2 698 069	9 834 222	129 453 335
2020	3 274 331	2 294 415	11 046 936	145 173 383
2021	3 279 395	1 743 955	10 787 025	153 916 031
2022	3 318 111	1 462 106	10 143 722	153 955 727
2023	3 337 726	1 227 585	9 854 100	158 032 317
2024	3 928 790	1 062 473	9 183 541	161 714 674

(Genel ağdan alınmıştır.)

Tabloyu inceleyen lise öğrencileri aşağıdaki sonuçlara ulaşmıştır.

I. Sabit hattan sabit hatta yapılan aramalar ile mobil hattan mobil hatta yapılan aramalar arasında negatif yönlü orta düzeyde ilişki vardır.

Telefon görüşmesi ile ilgili veri dosyasına yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

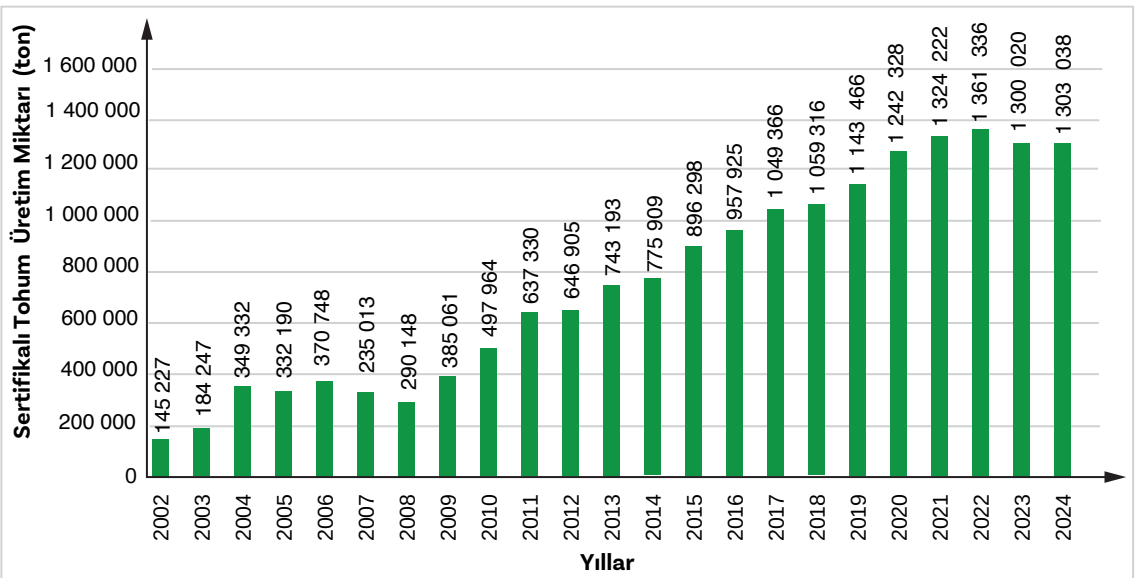
II. Teknolojinin gelişmesi ile beraber sabit hattan yapılan aramalar azalırken mobil hattan yapılan aramalar artmıştır.

Buna göre lise öğrencilerinin ulaştığı sonuçların doğruluğunu istatistiksel bilgilerinizi kullanarak değerlendiriniz.

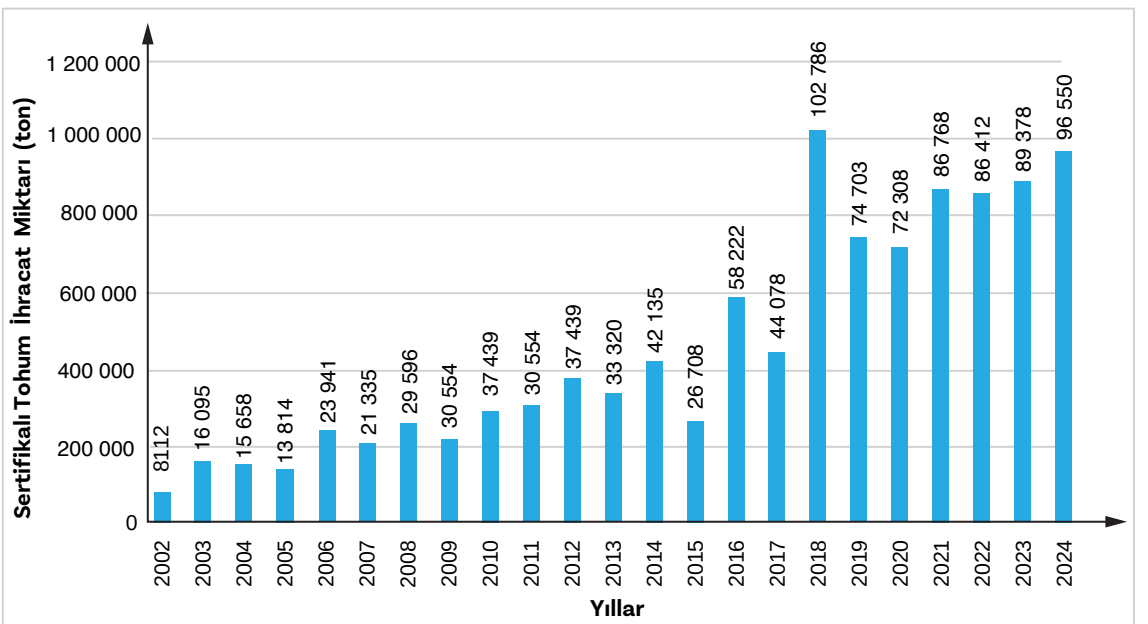
2. Türkiye, tohum tedarik sisteminde yerli tohum kullanımını artırarak sektörün rekabet gücünü sürdürülebilir hâle getirmeyi hedeflemektedir. Bu sistemle verimli ve izlenebilir gıda üretimi sayesinde markalaşma oluşturmak, yeni istihdam alanlarıyla katma değerin artırılması ve tarımsal verimliliğin yükseltilmesi amaçlanmaktadır. Ayrıca kent tarımının yerli çeşitler kullanılarak yaygınlaştırılması da sistemin temel öncelikleri arasındadır.

Bu bağlamda Türkiye'nin 2002-2024 yılları arasındaki sertifikalı tohum üretim miktarı (Grafik 1) ve sertifikalı tohum ihracat miktarı (Grafik 2) verilerine ulaşan araştırma şirketi çalışanı Hatice Hanım grafiklere bakarak Türkiye'nin sertifikalı tohum üretim miktarı ile sertifikalı tohum ihracat miktarı arasında pozitif yönlü orta düzeyde bir ilişki olduğu çıkarımında bulunmuştur.

(Genel ağdan alınmıştır.)



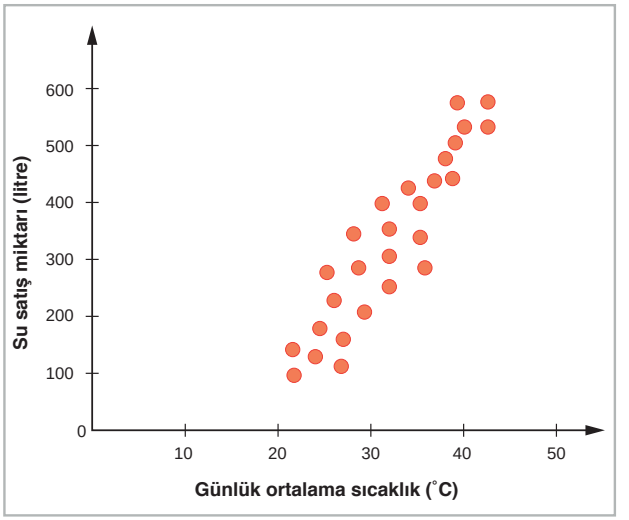
Grafik 1



Grafik 2

Buna göre Hatice Hanım'ın çıkarımını istatistiksel ölçütler kullanarak değerlendiriniz.

3. Bir market sahibi, yaz döneminde havaların ısınması ile beraber su satışlarının artacağını düşünerek bir su fabrikası ile anlaşma yapmıştır. Market sahibi, günlük ortalama hava sıcaklığının (°C) su satış miktarını (lt) nasıl etkileyebileceğini görmek için aşağıdaki serpme diyagramını hazırlatmıştır.



Buna göre

a) Serpme diyagramına göre günlük ortalama hava sıcaklığı (°C) ile su satış miktarı (lt) arasındaki ilişkinin yönünü ve gücünü tahmin ediniz.

b) Serpme diyagramına göre günlük ortalama hava sıcaklığı (°C) ile su satış miktarı (lt) arasındaki korelasyon katsayısının değer aralığını bulunuz.

c) Market sahibinin verdiği kararın doğruluğunu değerlendiriniz.

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

1. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

Aşağıda cevaplamanız için temaya ait farklı soru tiplerinde 9 adet soru bulunmaktadır.

1-7. bilgi ve becerileri ölçen soruları cevaplayınız.

1. Aşağıdaki tabloda istatistiksel araştırma sürecine ait bazı gerçek yaşam durumları verilmiştir.

Gerçek Yaşam Durumu	1. Nicel Değişken	2. Nicel Değişken
Eğitim		
Güvenlik		
Ulaşım		
Tarım		

Verilen gerçek yaşam durumları ile ilgili iki nicel değişkenli verilerdeki ilişkililiğe yönelik araştırma sorularına kaynaklık eden istatistiksel bağlamlara ait 1 ve 2. nicel değişkenlerle ilgili örnekleri yazarak tabloyu doldurunuz.

2. Fiziksel, zihinsel, ruhsal ve duyusal yetilerindeki çeşitli düzeyde kayıpları olan, topluma diğer bireylerle eşit koşullarda tam ve etkin katılımı kısıtlanan diğer bireylerin tutumları ile çevre koşullarından etkilenen bireylere "özel gereksinimli bireyler" denir. T.C. Aile ve Sosyal Hizmetler Bakanlığı özel gereksinimli bireyler için her alanda eşit katılımı desteklemektedir. Sağlık hizmetleri, kamuda memur ve işçi olarak istihdam, çalışan özel gereksinimli bireylerin erken emekliliği, gelir vergisi indirimi ve özel tüketim vergisi (ÖTV) muafiyetli araç alımları bunlardan bazılarıdır. Bu bağlamda sorulabilecek araştırma sorularından biri "Erzurum'daki özel gereksinimli birey sayısı ile ÖTV muafiyetli alınan araç sayısı arasında bir ilişki var mıdır?" sorusudur.

Buna göre bu araştırma sorusunu istatistiksel araştırma sorularında olması gereken ölçütleri göz önünde bulundurarak inceleyiniz. İnceleme sonucunda sorunun ilgili ölçütleri sağlayıp sağlamadığına dair fikirlerinizi tablodaki ilgili alanlara yazınız.

Araştırma Sorusu Ölçütleri	Sorunun İlgili Ölçütü Karşılayıp Karşılamadığına Dair Fikirleriniz
Araştırma sorusunun amacı açık mıdır?	
Araştırmaya değer midir?	
İlgilenilen grup (evren) açıkça görülmekte midir?	
Değişkenler açıkça görülmekte midir?	
Araştırma sorusu veri toplanarak cevaplanabilir mi?	
Araştırma sorusu değişebilirliği yansıtmakta mıdır?	
Odaklanılan grup, araştırma yapılmasına imkân vermekte midir?	
Araştırma sorusu nicel veri toplamayı gerektirir mi?	

3. Solunan hava kalitesinin sağlığa doğrudan etkisi olduğu, çağlardan beri bilinmektedir. Havanın yaklaşık %78,084'ünü azot (N_2), %20,934'ünü oksijen (O_2), %0,934'ünü argon (Ar), %0,035'ini karbondioksit (CO_2) oluşturmaktadır. Geriye kalan %0,001'i neon (Ne), metan (CH_4), helyum (He), hidrojen (H_2) ve kriptondan (Kr) meydana gelmektedir. Ayrıca atmosfer kütlesinin yaklaşık %0,25'i su buharıdır. Dolayısıyla insan sağlığını veya çevresel dengeleri bozacak şekilde havanın birleşiminin değişmesine ya da havada bulunmaması gereken maddelerin havaya karışmasına **hava kirliliği** denir.

(Genel ağdan alınmıştır.)

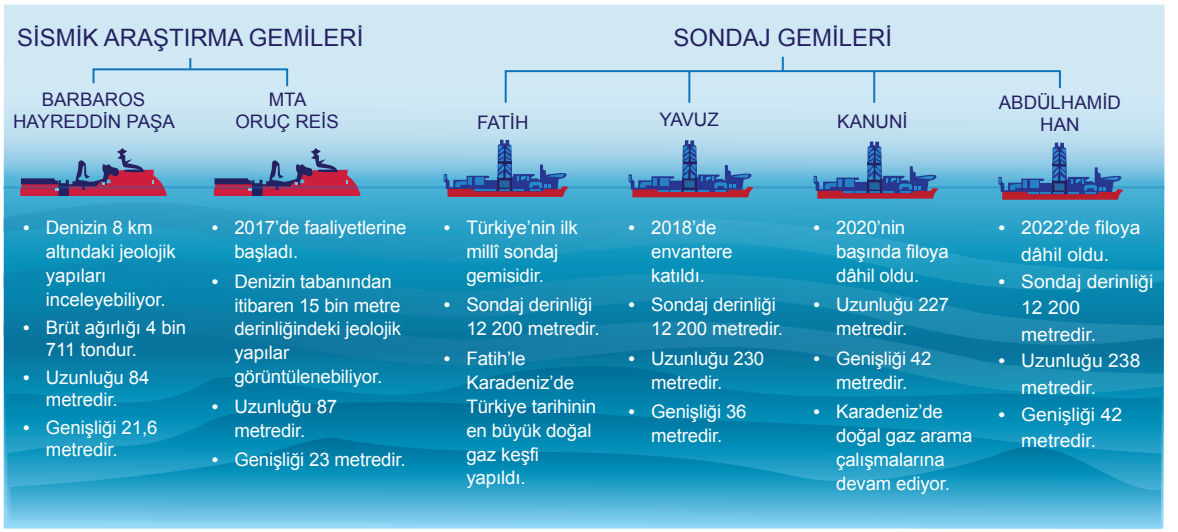
Buna göre

a) Verilen bilgilerden yola çıkarak iki nicel değişken arasındaki ilişkililiğe yönelik bir araştırma sorusu oluşturunuz.

b) Oluşturduğunuz araştırma sorusu doğrultusunda bir veri toplama planında bulunması gereken özellikleri dikkate alarak bir veri toplama planı hazırlayınız ve aşağıdaki boşluklara yazınız.

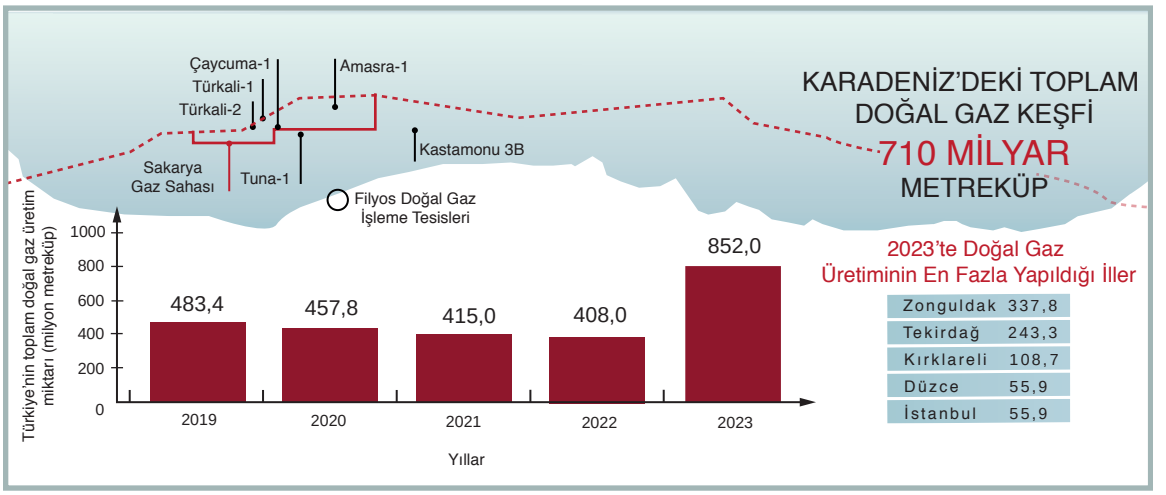
- **Araştırma sorularına cevap bulmayı sağlayacak veri toplama aracının belirlenmesi**
- **Evren ve örneklemin belirlenmesi**
- **Rastgeleliğin sağlanması**
- **Değişkenlerin belirlenmesi**
- **Verilerin nerede, ne zaman, nasıl ve kimler tarafından toplanacağının belirlenmesi**
- **Verilerin kaydedilmesi**
- **Verilerin gizliliğinin sağlanması, nesnel ve dürüst olunması**

4. Türkiye, enerji ithalatına olan bağımlılığını azaltmak için son yıllarda önemli yatırımlar yapmıştır. Bunlardan bazıları doğal gaz arama çalışmalarında kullanılan sismik araştırma ve sondaj gemileridir. Görsel 1'de bu çalışmalarda kullanılan gemiler ve gemilere ait bilgiler verilmiştir.



Görsel 1

Karadeniz'deki doğal gaz keşfiyle beraber Türkiye, doğal gaz üretiminde önemli bir adım atmıştır. Türkiye, keşfettiği doğal gazı 2023 yılının Eylül ayı itibarıyla sisteme vermeye başlamıştır. Görsel 2'de Türkiye'nin yıllara göre doğal gaz üretim miktarları ve doğal gazın nerelerden çıkarıldığı ve nerelerde üretildiği bilgisi verilmiştir.



Görsel 2

Buna göre

a) İki nicel değişken arasındaki ilişkiliğe odaklanan bir istatistiksel araştırma sorusu oluşturunuz.

b) Oluşturduğunuz istatistiksel araştırma sorusunu araştırma sorusunda bulunması gereken ölçütler doğrultusunda değerlendiriniz.

c) Oluşturduğunuz araştırma sorusu doğrultusunda veri toplama planında bulunması gereken özellikleri dikkate alarak bir veri toplama planı hazırlayınız.

ç) Topladığınız veriler doğrultusunda iki nicel değişken arasındaki ilişkililiğe odaklanan araştırma sorunuz için istatistik yazılımından yararlanarak serpme diyagramını çiziniz.

d) Çizdiğiniz serpme diyagramını yorumlayınız.

5. Aşağıdaki tabloda 2009-2024 yılları arasında Türkiye'de kullanılan kimyasal gübre miktarları (ton) verilmiştir.

Yıllar	Azotlu Gübre (ton)	Fosforlu Gübre (ton)	Potaslı Gübre (ton)
2009	6 730 852	3 416 979	130 901
2010	6 379 090	3 028 666	166 996
2011	5 995 500	2 882 296	196 512
2012	6 817 217	3 129 299	202 466
2013	7 542 247	3 662 099	211 410
2014	7 107 106	3 353 104	234 333
2015	7 077 214	3 437 368	263 197
2016	9 028 793	4 660 032	236 623
2017	8 401 087	4 438 096	249 891
2018	7 272 531	3 063 902	231 024
2019	8 010 324	3 924 247	233 000
2020	9 774 691	4 491 994	229 130
2021	8 511 183	3 726 914	308 446
2022	7 520 871	3 550 343	261 495
2023	9 277 071	4 328 555	291 535
2024	9 128 435	4 310 662	313 338

(Genel ağdan alınmıştır.)

Buna göre

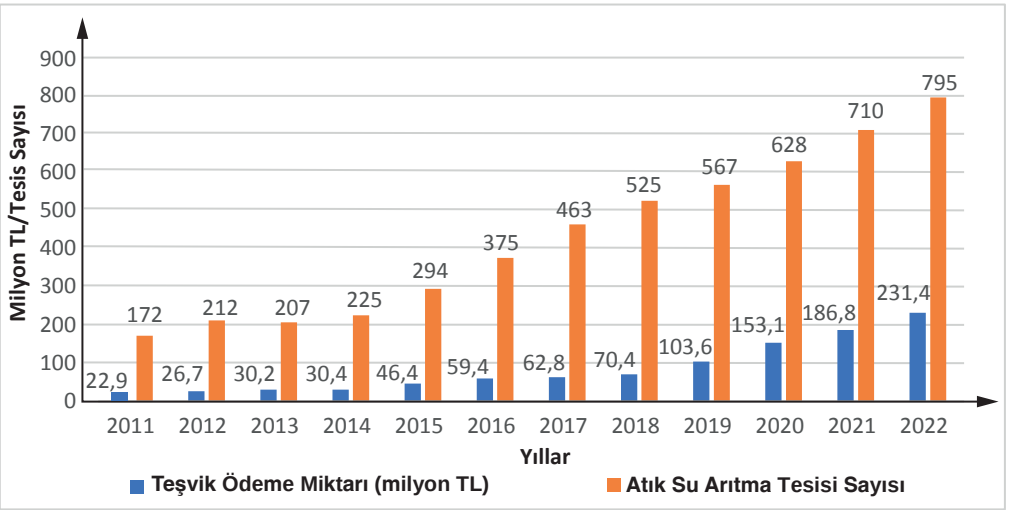
a) Karekoddaki bilgileri kullanarak istatistik yazılımı yardımıyla Türkiye'de kullanılan azotlu gübre miktarı ile fosforlu gübre miktarı arasındaki ilişkiyi incelemek için bir serpme diyagramı çiziniz. Çizdiğiniz serpme diyagramına göre BSO'yu hesaplayarak iki nicel değişken arasındaki ilişkinin yönünü ve gücünü yazınız.

Kimyasal gübre miktarı ile ilgili veri dosyasına yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

b) Karekoddaki verileri kullanarak Türkiye'de kullanılan fosforlu gübre miktarı ile potaslı gübre miktarı arasında bir ilişki olup olmadığını, ilişki varsa bu ilişkinin yönünü ve gücünü istatistik yazılımında korelasyon katsayısını hesaplayarak yazınız.

6. Atık su, insanların ihtiyaçlarını karşıladıktan sonra temiz olma özelliğini kaybederek çevre için zararlı hâle gelen su olarak tanımlanmaktadır. Bu kapsamda T.C. Çevre, Şehircilik ve İklim Değişikliği Bakanlığı tarafından atık su arıtma tesislerinin enerji giderlerinin %50'sinin karşılanması amacıyla atık su arıtma tesislerine teşvik ödemeler yapılmasına karar verilmiştir. Aşağıdaki grafikte 2011-2022 yılları arasında ödenen yaklaşık teşvik miktarları (milyon TL) ve atık su arıtma tesisi sayıları verilmiştir.

(Genel ağdan alınmıştır.)



Buna göre

a) Grafiğe bakarak teşvik ödeme miktarı arttıkça atık su arıtma tesisi sayısının da arttığını savunan bir kişinin yaptığı çıkarımı istatistiksel temellendirmeler yaparak değerlendirmelerinizi yazınız.

b) Grafikten hareketle elde edilecek sonuçların tüm dünyaya genellenebileceği söylenebilir mi? Yorumlarınızı yazınız.

c) Atık su miktarının fazla olmasının nedeni atık su arıtma tesisi sayısının az olması mıdır? Yorumlarınızı yazınız.

7. Atomların parçalanması sonucu açığa çıkan yüksek seviyelerdeki ısı enerjisini elektrik enerjisine dönüştüren sistemler nükleer enerji sistemleri, bu dönüşümü yapabilen santraller ise nükleer enerji santralleri olarak adlandırılır. Dünyada birçok ülke nükleer enerji santrallerini elektrik üretmek için kullanmaktadır. Görsel 1'de Türkiye'de yapımı devam eden Akkuyu Nükleer Güç Santrali, Görsel 2'de ise yapımı planlanan Sinop Nükleer Güç Santrali'nin üç boyutlu modellenmiş hâli verilmiştir.



Görsel 1



Görsel 2

Akkuyu Nükleer Güç Santrali'nden yılda 35 milyar kWh, Sinop Nükleer Güç Santrali'nden ise 34 milyar kWh elektrik üretilmesi planlanmaktadır. Bu iki santralin yapımı tamamlandığında ülkemizin elektrik ihtiyacının %25'inin nükleer enerjiden karşılanması beklenmektedir.

2014 yılı sonu itibarıyla elektrik enerjisi üretiminde doğal gazın payı %48, kömürün %29, petrolün ise %2 seviyelerindedir. Birincil enerji kaynaklarımızda %72 oranında dışa bağımlılığımız bulunmaktadır. Özellikle elektrik üretimimizin yarısını karşıladığımız doğal gazda dışa bağımlılığımız %98 oranındadır. 2023 yılı enerji vizyonumuz çerçevesinde elektrik üretiminde doğal gaza olan bağımlılığımızın %30 oranına düşürülmesi hedeflenmektedir. Bu hedef çerçevesinde 2023 yılına kadar potansiyel tüm hidroelektrik ve kömür kaynaklarını kullanmak, yenilenebilir enerjinin elektrik üretimimiz içerisindeki payını ve enerji verimliliğimizi artırmak, nükleer enerjiyi elektrik üretimi portföyüne dahil etmek planlanmaktadır.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Bir araştırmacı T.C. Enerji ve Tabii Kaynaklar Bakanlığının araştırmasından elde ettiği yukarıdaki bilgilere göre "Nükleer güç santralinden elde edilen elektrik enerjisi miktarı ile doğal gazdan elde edilen elektrik enerjisi miktarı arasında negatif yönlü zayıf bir ilişki vardır." şeklinde bir çıkarımda bulunmuştur.

Buna göre

a) Araştırmacının çıkarımının doğru olup olmadığına karar verilebilmesi için hangi verilerin kullanılması gerekir?

b) Yukarıdaki bilgilere dayanarak oluşturacağınız araştırma sorusu ne olurdu?

8-9. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

8. Gerçek hayatta olduğu gibi genel ağda da karşılaşılma ihtimali olan tehlikeler vardır. Çocukları gerçek hayattaki tehlikelerden korumak için nasıl çaba harcanıyor ve birtakım kurallar uygulanıyorsa genel ağı da güvenli ve bilinçli bir şekilde kullanmayı öncelikle ebeveynler öğrenmeli sonrasında da çocuklarına öğreterek sanal dünyanın riskleri en aza indirilmelidir. Bu şekilde genel ağın eğitim, iletişim ve güzel zaman geçirme gibi katkıları çocuklara fırsat olarak sunulabilir. Bu doğrultuda Bilgi Teknolojileri ve İletişim Kurumunun 2011 yılında uygulamaya başladığı ücretsiz ve «talebe bağlı güvenli genel ağ hizmeti genel ağ kullanıcılarının hizmetine sunulmuştur.

Bilgi Teknolojileri ve İletişim Kurumunun sağladığı güvenli genel ağ hizmetinden kaç kişinin faydalandığını görmek isteyen araştırma şirketi çalışanı, yukarıdaki bilgiler doğrultusunda iki nicel değişkenli veriye dayalı "Genel ağ kullanan abone sayısı ile güvenli genel ağ kullanan abone sayısı arasında ilişki var mıdır?" araştırma sorusunu oluşturmuştur.

Buna göre araştırma şirketi çalışanının oluşturduğu araştırma sorusunda aşağıdaki istatistiksel araştırma sorusunda bulunması gereken ölçütlerden hangisi karşılanmamıştır?

A) Nicel veri toplamaya uygundur.
B) Amaç açıktır.
C) İlgilenilen grup açıkça görülmektedir.
D) Nicel veri toplanarak cevaplanabilir.
E) Araştırmaya değerdir.

9. Türkiye Millî Basketbol Takımı, 2025 yılında büyük bir başarı gösterip Avrupa Basketbol Şampiyonası'nda Yunanistan'ı 94-68 skoru ile yenerek finale yükselmiştir. Finale yükselene kadar İzlanda'yı 76-75, Macaristan'ı 92-66, Polonya'yı 91-77 skorlarla yenmiştir. Millî takımın başarısının sebeplerini araştırmak isteyen bir araştırmacı,istatistiksel analiz sürecinde Türkiye Millî Basketbol Takımı'nın Avrupa Basketbol Şampiyonası'nda blok sayısı ve başarı yüzdesi arasındaki ilişki için korelasyon katsayısı, ilişkinin yönü ve gücü ile ilgili aşağıdakilerden hangisini söylerse hatalı/yanlı bir sonuca ulaşmış olur?

	Korelasyon katsayısı	İlişkinin yönü	İlişkinin gücü
A)	−0,546	Negatif	Orta
B)	−0,765	Negatif	Güçlü
C)	0,214	Pozitif	Zayıf
D)	0,679	Pozitif	Güçlü
E)	0,716	Pozitif	Güçlü

Tema ile ilgili daha fazla soruya yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

2. TEMA GEOMETRİK ŞEKİLLER

2.1. Dörtgenlerin Özellikleri

2.2. Özel Dörtgenler Arasındaki İlişkiler

2.3. Çokgenlerin Sınıflandırılması

2.4. Dışbükey Çokgenlerin Özellikleri

2.5. Çokgenlerle İlgili Problemler

Anahtar Kavramlar

- alan
- deltoid
- dışbükey çokgen
- dikdörtgen
- düzgün çokgen
- eşkenar dörtgen
- içbükey çokgen
- kare
- köşegen
- paralelkenar
- simetri
- yamuk

Sembol ve Gösterimler

- $\perp$
- $//$
- AB
- $[AB]$
- $|AB|$
- $A(ABCD)$
- $Ç(ABCD)$

Bu temada sizden

- üçgenlerde açı, benzerlik ve alan özelliklerinden yola çıkarak dörtgenlerin açı, kenar, köşegen, simetri ve alan özelliklerine ilişkin muhakeme yapabilmeniz,
- özel dörtgenlerin kenar, açı, köşegen ve simetri özelliklerinden hareketle aralarındaki ilişkileri yapılandırabilmeniz,
- çokgenleri içbükey veya dışbükey olarak sınıflandırabilmeniz,
- dışbükey çokgenlerin kenar, açı, köşegen, simetri ve alan özelliklerine dair çıkarım yapabilmeniz,
- çokgenlerin kenar, açı, köşegen, simetri ve alan özelliklerini içeren problemler çözebilmeniz

beklenmektedir.

Tema boyunca sizden ölçme ve değerlendirme sorularını cevaplamanız, çalışma kâğıtlarındaki soruları ve alıştırma sorularını çözmeniz, performans görevini yerine getirmeniz ve araştırma ödevini yapmanız istenecektir.



2. Tema karekodu

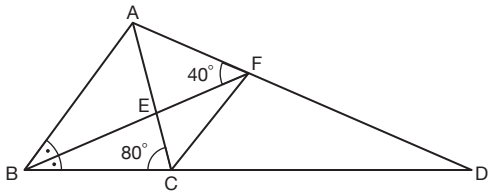
2. Tema Sunusu'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Başlarken

Günlük hayatta çevrede bulunan birçok nesnenin aslında geometrik şekillerden oluştuğu görülmektedir. Örneğin kar kristalleri, futbol topu, bal peteği, yol tabelaları, mimari yapılar hatta karo döşemeler bile çokgenlerin ve dörtgenlerin farklı türlerinden oluşmaktadır. Bir binanın mimari yapısında dikdörtgenler, bir uçurtmada altıgen, bir masa yüzeyinde kare bulunurken; kaplumbağa kabuğu, örümcek ağı ve denizyıldızı doğadaki geometrik yapılara örnek olarak gösterilebilir. Bu şekiller sadece estetik bir görüntü değil aynı zamanda dayanıklılık, denge ve verimlilik sağlar. Bu nedenle çokgenler mühendislikten sanata, teknolojiden doğaya kadar birçok alanda önemli bir rol üstlenmektedir.

Ön Değerlendirme

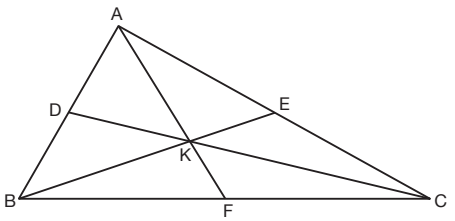
1.



ABC üçgeninde [BF], ABD açısının iç açıortayı, $m(\widehat{AFB}) = 40^\circ$ ve $m(\widehat{ACB}) = 80^\circ$ olarak veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{FCD})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

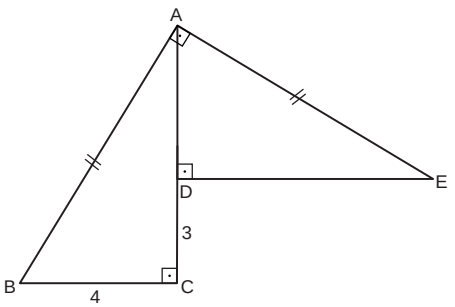
2.



ABC üçgeninde [BE] ve [CD] kenarortaylar, $[BE] \cap [CD] = K$ olarak veriliyor.

ABC üçgeninde $|DK| = 5$ cm ve $|AK| = 6$ cm olduğuna göre $|KC| + |KF|$ toplamının kaç cm olduğunu bulunuz.

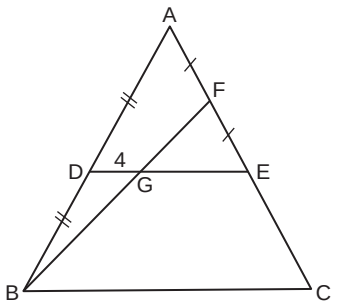
3.



Yandaki şekilde ACB ve ADE dik üçgenler, $[AC] \perp [CB]$, $[DE], [BA] \perp [DE]$; A, D ve C noktaları doğrusaldır. $|AB| = |AE|$, $|BC| = 4$ cm ve $|DC| = 3$ cm olarak veriliyor.

Buna göre $|DE|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

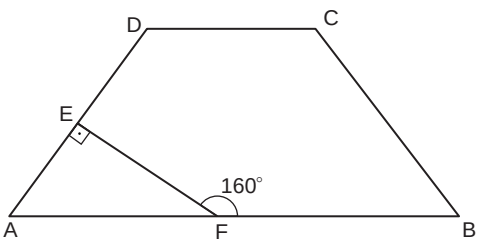
4.



ABC üçgeninde $[DE] \mathbin{/\!/} [BC]$, $D \in [AB]$; $E, F \in [AC]$, $[DE] \cap [BF] = \{G\}$, $|AD| = |DB|$, $|AF| = |FE|$ ve $|DG| = 4$ cm olarak veriliyor.

Buna göre $|BC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

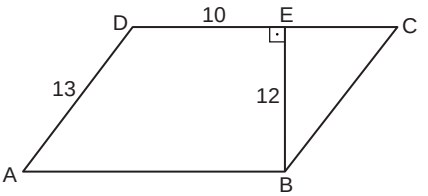
5.



ABCD yamuğunda $[AB] \mathbin{/\!/} [DC]$, $E \in [AD]$, $F \in [AB]$, $[FE] \perp [AD]$ ve $m(\widehat{BFE}) = 160°$ olarak veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{ADC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

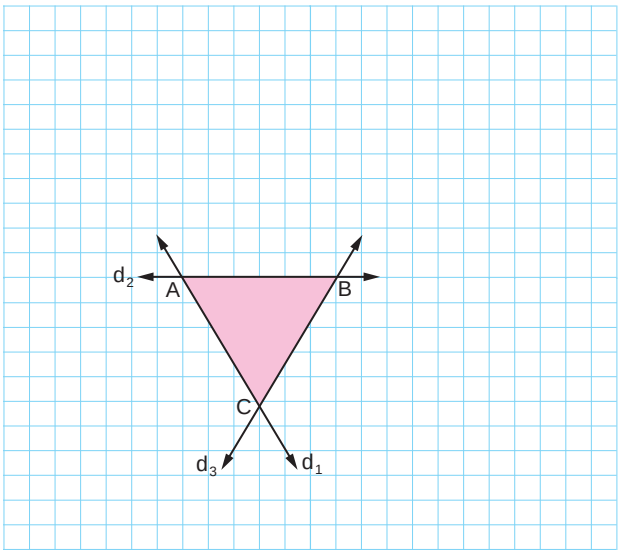
6.



ABCD paralelkenarında $E \in [DC]$, $[BE] \perp [DC]$, $|AD| = 13$ cm, $|EB| = 12$ cm ve $|DE| = 10$ cm olarak veriliyor.

Buna göre A(ABCD) nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

7. Aşağıdaki birim kareli zemin üzerinde d_1, d_2 ve d_3 doğrularının kesişimleriyle oluşan ABC eşkenar üçgensel bölgesi verilmiştir.

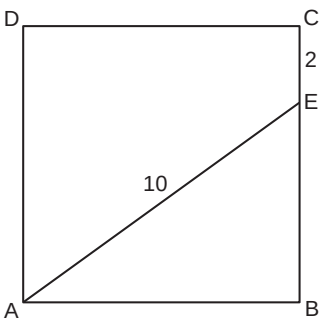


Buna göre

a) ABC üçgensel bölgesinin d_2 doğrusuna göre simetriğinin alınmasıyla oluşan bölge ABC′ üçgensel bölge olmak üzere ACBC′ bölgesinin oluşturduğu geometrik şekli ifade ediniz.

b) ABC üçgensel bölgesinin d_2 doğrusuna göre simetriğinin alınmasıyla oluşan bölge ABC′ üçgensel bölge, d_3 doğrusuna göre simetriği alındığında oluşan bölge A′BC üçgensel bölge olmak üzere ACA′C′ bölgesinin oluşturduğu geometrik şekli ifade ediniz.

8.



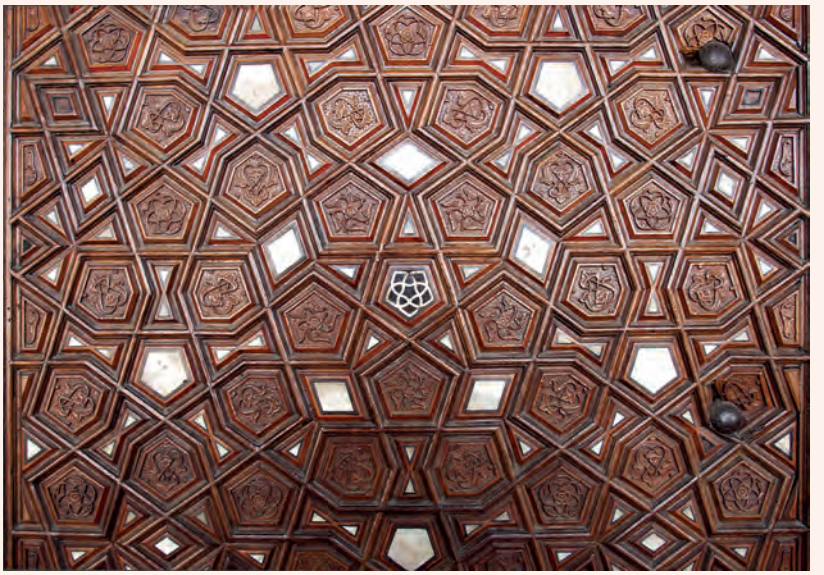
ABCD karesinde C, E ve B noktaları doğrusaldır. $|CE| = 2$ cm, $|AE| = 10$ cm olarak veriliyor.

Buna göre A(ABCD) nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

2.1. DÖRTGENLERİN ÖZELLİKLERİ

Konuya Başlarken

Ahşap, Anadolu-Türk sanatının erken dönemlerinden itibaren çeşitli sanat ürünlerinde kullanılan bir malzeme olarak görülmektedir (Görsel 2.1). Başta kapı, pencere kanatları, minber, mihrap, sütun başlıkları, kiriş gibi mimari ögelerde ve rahle, Kur'an mahfazası, sandık, sehpa gibi eşyaların üretilmesinde kullanılmıştır. Ahşap, çok yaygın kullanılan bir malzeme olduğundan kullanılan teknikler de buna bağlı olarak çeşitlilik göstermektedir.



Görsel 2.1: *Türk İslam Mimarisinde Ahşap Üzerine Yapılmış Geometrik Desenler Modeli*

Buna göre aşağıdaki sorularla ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. **Görsel 2.1'de verilen süslemede hangi geometrik şekiller kullanılmıştır?**

2. **Değişik üçgen modellerinin bir araya gelmesiyle hangi geometrik şekiller elde edilebilir?**

3. **Üçgenlere ait özelliklerden yola çıkılarak dörtgenlerin özelliklerine ulaşılabilir mi?**

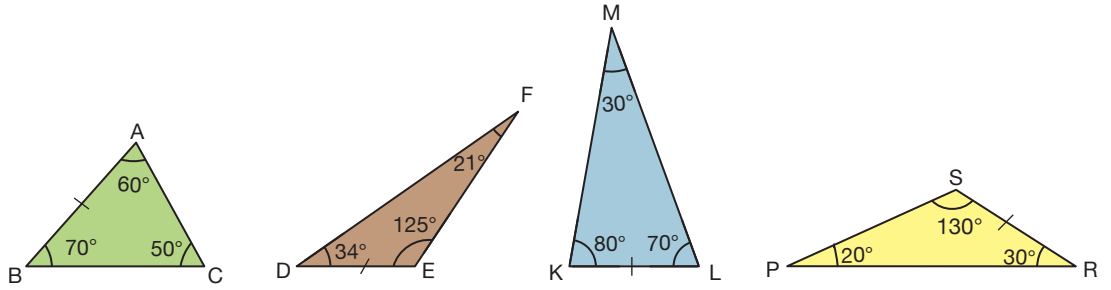
Çevremizdeki yapıların geometrik modellerle analiz edilmesi; nesnelerin boyutsal özelliklerinin ve mekânsal ilişkilerinin farklı dörtgenler üzerinden tanımlanmasına imkân sağlar. Oda zeminleri, masa yüzeyleri ve futbol sahaları, farklı dörtgen türlerinin günlük hayattaki somut örneklerini oluşturur. Bu geometrik şekilleri tanımak ve temel özelliklerini öğrenmek, hem matematik derslerinde hem de günlük yaşamda önemli avantajlar sağlar.

Bu bilgiler sayesinde yalnızca akademik başarı desteklenmez; aynı zamanda alan ve çevre hesaplamalarıyla ilgili problemler de daha kolay çözülebilir. Böylece bir duvarı boyamak için ne kadar boyaya ya da bir bahçeyi çevirmek için ne kadar çite ihtiyaç duyulacağı pratik bir şekilde belirlenebilir.

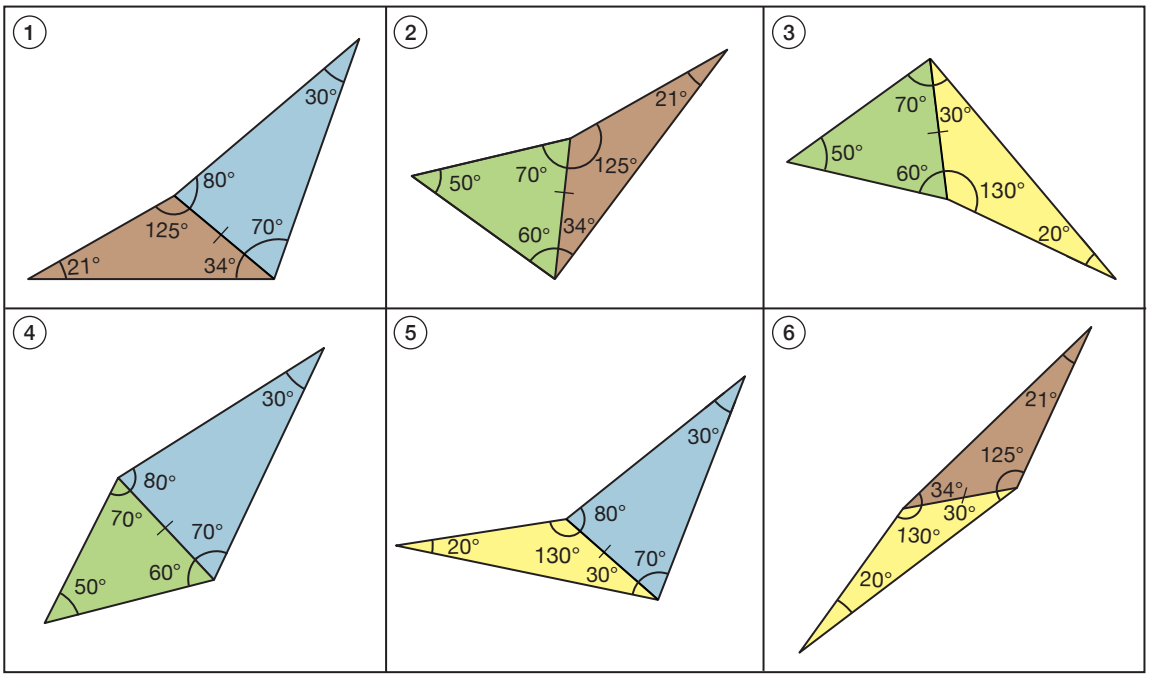
1. Uygulama

Dörtgenlerde İçbükeylik ve Dışbükeylik

Aşağıda birer kenar uzunluğu eşit olan dört farklı üçgen verilmiştir.



İç açı ölçüleri bilinen ve bir kenarının uzunluğu eşit olan dört farklı üçgenin eşit kenarları üzerinde çakıştırılmasıyla elde edilen dörtgenler aşağıdaki tabloda verilmiştir.



Buna göre

1. Tablodaki numaralandırılmış dörtgenleri görünümlerine göre iki gruba ayırırsanız ayırma kurallarınızın ne olacağını tartışınız.

2. Tablodaki numaralandırılmış dörtgenlerden hangilerinin bir iç açı ölçüsünün 180° den büyük, hangilerinin her bir iç açı ölçüsünün 180° den küçük olduğunu bularak alttaki boşluğa yazınız.

3. Tablodaki numaralandırılmış dörtgenlerden hangilerinin tüm köşegenlerinin dörtgenin iç bölgesinde, hangilerinin bir köşegeninin dörtgenin dış bölgesinde kalacağını bularak alttaki boşluğa yazınız.

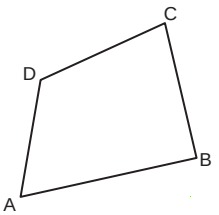
4. 2 ve 3. maddelerde gruplandırma için kullanılan ölçütlerin dörtgenlerin sınıflandırılmasında sağladığı kolaylıklar üzerine sınıf arkadaşlarınızla saygı ve nezaket kuralları çerçevesinde tartışınız.

Her bir iç açısının ölçüsü 180° den küçük olan veya köşegenleri dörtgenin iç bölgesinde bulunan dörtgenlere **dışbükey dörtgen**, herhangi bir iç açısının ölçüsü 180° den büyük olan veya köşegenlerinden biri dörtgenin dış bölgesinde bulunan dörtgenlere **içbükey dörtgen** denir. Bundan sonra incelenecek dörtgenler ve kullanılacak dörtgen ifadeleri dışbükey dörtgenler için geçerli olacaktır.

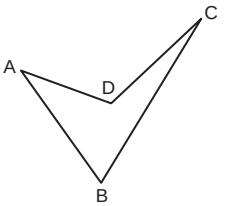
1. Örnek

Aşağıdaki dörtgen örneklerinden hangilerinin dışbükey, hangilerinin içbükey olduğunu bulunuz.

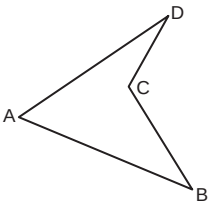
I.



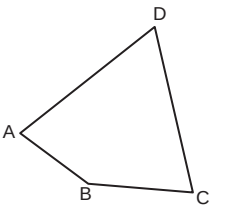
II.



III.



IV.



Çözüm

I ve IV. dörtgenlerin her bir iç açısının ölçüsü 180° den küçük olduğu için dışbükey, II ve III. dörtgenlerin birer açısının ölçüsü 180° den büyük olduğu için içbükey dörtgenlerdir.

Sıra Sizde 1

Aşağıdaki ifadelerde içbükey ve dışbükey dörtgenlere ait özellikler verilmiştir. Sol taraftaki boşluklara bu özelliklerden doğru olanlara "D", yanlış olanlara "Y" yazınız.

{.....} Dışbükey dörtgenlerin bütün iç açılarının ölçüleri eşittir.

{.....} İçbükey dörtgenlerin iki iç açısının ölçüsü 180° den büyük olabilir.

{.....} Hem içbükey hem de dışbükey dörtgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı eşittir.

{.....} Dışbükey dörtgenlerde çizilen köşegenler dörtgenin iç bölgesinde kalır.

2. Uygulama

Dörtgenlerde Açı Özellikleri

Aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları yanıtlayınız.

1. Dörtgen, yamuk, ikizkenar yamuk, dik yamuk, paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen ve karenin iç açıları arasındaki ilişkiye, iç açılarının ölçüleri toplamına, dış açılarının ölçüleri toplamına dair varsayımlarınızı yazınız.

2. Elde ettiğiniz varsayımlardan genellemeler oluşturmak için aşağıda verilen matematik yazılımı ile ilgili adımları uygulayınız.

   1. adım: Araçlar bölümünden **Doğru** aracını seçiniz. Yatay olacak şekilde soldan sağa doğru sırasıyla A ve B noktalarını seçiniz.

2. adım: Araçlar bölümünde **Paralel Doğru** aracını seçiniz. AB doğrusunu seçerek bu doğruya paralel başka bir doğru oluşturunuz. AB doğrusuna paralel olan doğru üzerinde bir C noktası oluşacaktır.

3. adım: Nokta aracını seçerek C noktasının olduğu doğru üzerinde ve C noktasının solunda kalacak şekilde herhangi bir D noktası belirleyiniz.

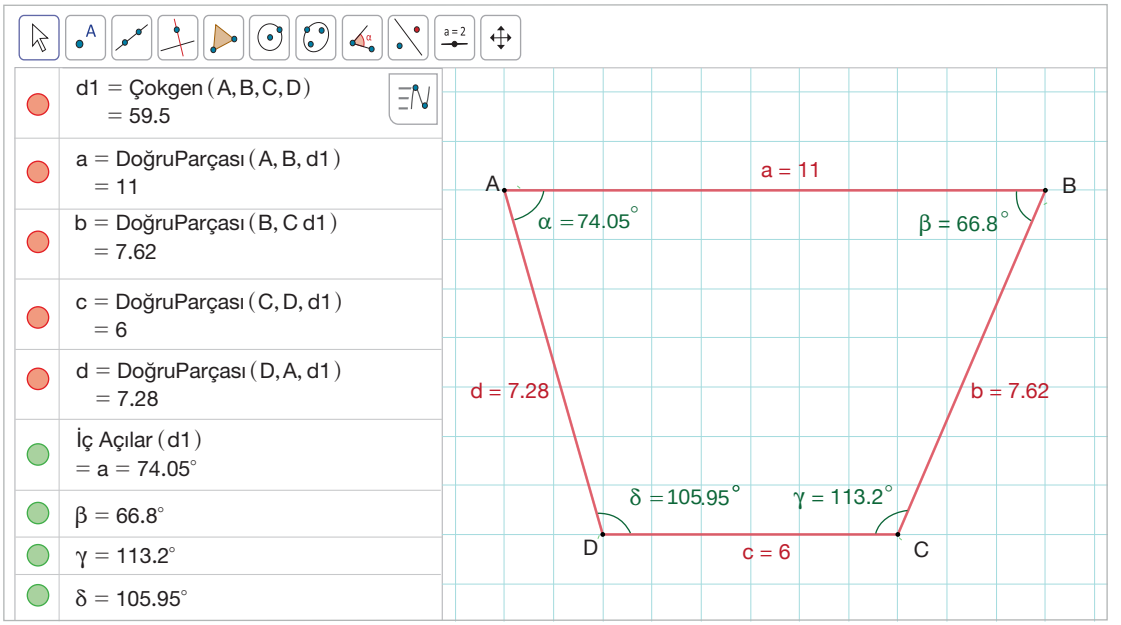
4. adım: Çokgen aracını seçerek sırasıyla A, B, C, D noktalarını ve yeniden A noktasını işaretleyiniz.

5. adım: Nesneyi Göster/Gizle aracını seçerek çokgen dışındaki doğruları seçiniz.

6. adım: Araçlar bölümünden **Açı** aracını seçerek dörtgen içindeki bölgeyi işaretleyiniz.

7. adım: Uzaklık veya **Uzunluk** aracını seçerek tüm kenarları işaretleyiniz.

Bu adımlar uygulandığında matematik yazılımında oluşacak ABCD dörtgenine benzer bir örneğinin görüntüsü aşağıda verilmiştir.



8. adım: Taşı aracını seçiniz, aşağıdaki maddelerde verilen yönergeleri sırasıyla uygulayarak elde ettiğiniz özel dörtgenler ile ilgili bilgileri Tablo 1'de ilgili alanlara örnekteki gibi yazınız.

a) İkizkenar yamuk elde edebilmek için AD ve BC kenar uzunlukları eşit oluncaya kadar C ve D köşelerini hareket ettiriniz.

b) Dik yamuk elde edebilmek için D köşesindeki açının ölçüsü 90° oluncaya kadar D köşesini hareket ettiriniz.

c) Paralelkenar elde edebilmek için A ile C ve B ile D açılarının ölçüleri eşit oluncaya kadar D noktasını sağa ve sola hareket ettiriniz.

ç) Eşkenar dörtgen elde edebilmek için AB ve BC kenar uzunlukları eşit oluncaya kadar A köşesini sağa ve sola hareket ettiriniz.

d) Dikdörtgen elde edebilmek için köşelerde oluşan açıların ölçüleri 90° oluncaya kadar C köşesini hareket ettiriniz.

e) Kare elde edebilmek için AB ve BC kenar uzunlukları eşit oluncaya kadar C köşesini hareket hareket ettiriniz.

Tablo 1

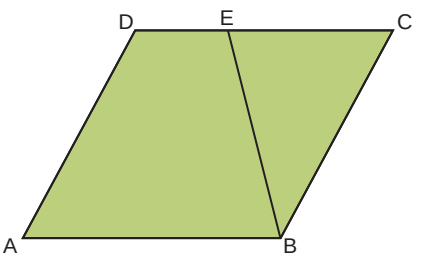
	İfadeler				
	İç açı ölçüleri toplamı 360° dir.	Dış açı ölçüleri toplamı 360° dir.	Tüm iç açılarının ölçüleri eşittir.	Karşılıklı iç açılarının ölçüleri eşittir.	Komşu iç açıları bütünlerdir.
Dörtgen	✓				
Yamuk	✓				
İkizkenar yamuk	✓				
Dik yamuk	✓				
Paralelkenar	✓				
Eşkenar dörtgen	✓				
Dikdörtgen	✓				
Kare	✓				

3. Tablodan elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak dörtgenlerin açı özelliklerine ilişkin örüntüleri genelleyiniz. Bu süreçte sınıf arkadaşlarınızın görüşlerini dinleyerek onların yapacağı genellemeler hakkındaki fikirlerinizi paylaşınız.

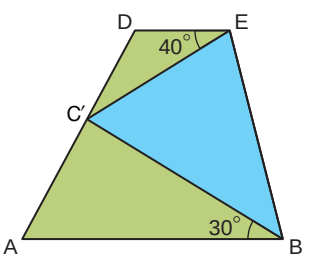
4. Yaptığınız varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak dörtgenlerin açı özelliklerine ilişkin önermelerinizi yazınız.

5. Dörtgenlerin açı özelliklerine ilişkin sunduğunuz önermeleri yeni durumlara uyarlayarak değerlendirmek için aşağıdaki soruyu cevaplayınız.

Şekil 1'deki ön yüzü yeşil, arka yüzü mavi renkli ABCD paralelkenar biçimindeki karton $[BE]$ boyunca katlandığında C noktası Şekil 2'deki gibi $[AD]$ üzerindeki C′ noktası ile çakışmaktadır. $m(\widehat{DEC'}) = 40^\circ$ ve $m(\widehat{ABC'}) = 30^\circ$ olarak veriliyor.



Şekil 1

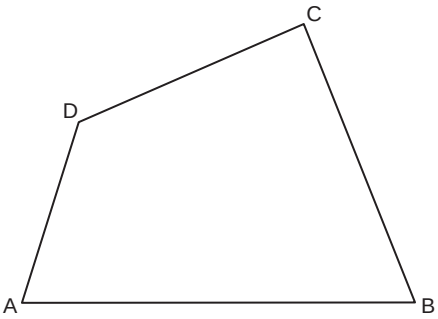


Şekil 2

Buna göre $m(\widehat{ADC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

6. Aşağıda dörtgenlerin açı özellikleriyle ilgili bir önerme verilmiştir.

Önerme: Bir dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.



Verilenler: ABCD dörtgeni,
$m(\widehat{A}), m(\widehat{B}), m(\widehat{C})$ ve $m(\widehat{D})$

İspatlanacak ifade:
$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360°$ dir.

Önermenin ispat adımlarının yer aldığı Tablo 2'deki boşlukları tabloda verilen örneği ve aşağıdaki sıralı adımları dikkate alarak doldurunuz.

I. Dörtgeni iki ayrı üçgene ayırmak için AC köşegenini çiziniz.

II. Oluşturduğunuz iki ayrı üçgendeki her bir iç açının ölçüsünü harflendirerek tablonun 2. adımındaki "ifadeler" kısmına yazınız.

III. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamından elde edilecek matematiksel ifadeleri tablonun 3. adımındaki "ifadeler" kısmına yazınız.

IV. Dörtgenin iç açılarının ölçüleri olan $m(\widehat{A}), m(\widehat{B}), m(\widehat{C})$ ve $m(\widehat{D})$ nün toplamını tablonun 4. adımındaki "ifadeler" kısmına yazınız.

Tablo 2

Adım	İfadeler	Gerekçe
I.	ABC ve ACD üçgenlerini elde etme	ABCD dörtgenini iki ayrı üçgene ayırmak için AC köşegeni çizildi.
II.	$m(\widehat{BAC}) =$ $m(\widehat{DAC}) =$ $m(\widehat{ACB}) =$ $m(\widehat{ABC}) =$ $m(\widehat{ADC}) =$ $m(\widehat{ACD}) =$	ABCD dörtgeninin iç açı ölçüleri ve köşegenin oluşturduğu yeni açı ölçüleri tanımlandı.
III.		Oluşan üçgenlerin iç açı ölçüleri toplandı.
IV.		Tablonun 3. adımında elde edilen eşitlikler toplandı.

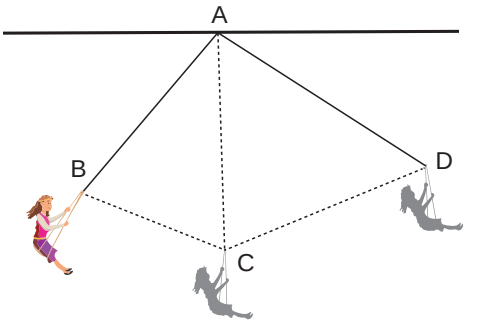
7. Elde ettiğiniz önermelerden birini 6. maddedeki ispat adımlarına benzer bir yöntem izleyerek ispatlayınız. Uyguladığınız ispatı kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

8. Elde ettiğiniz çıkarımları matematiksel modele dönüştürerek aşağıdaki gerçek yaşam durumu probleminde uygulayınız.

Elif salıncakta sallanırken annesi fotoğraf makinesinin (Görsel) deklanşör tuşuna peş peşe basıyor. Fotoğraf makinesinde oluşan görüntünün modellenmiş hâli Şekil'de verilmiştir. Elif'in B noktasındaki konumundan D noktasındaki konumuna gelinceye kadar oluşturduğu BAD açısının ölçüsü 100° olarak verilmiştir.



Görsel



Şekil

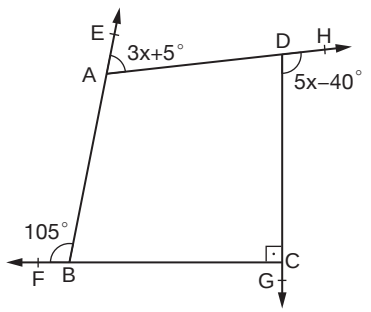
Buna göre

a) Üçgende açı özellikleri kullanılarak "Üçgende açı özellikleri kullanılarak BCD açı ölçüsünün kaç derece olduğu bulununabilir mi?" sorusu üzerine sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

b) BCD açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu dörtgenin açı özelliklerini kullanarak bulunuz.

c) BCD açısının ölçüsü bulunurken dörtgende açı özelliklerinin kullanılmasının sorunun çözümüne ne gibi kolaylıklar sağlayacağını değerlendiriniz.

2. Örnek



Yandaki ABCD dörtgeninde $A \in [BE, B \in [CF, C \in [DG,$ $D \in [AH, m(\widehat{EAH}) = 3x + 5°, m(\widehat{HDG}) = 5x - 40°, m(\widehat{FCD}) = 90°$ ve $m(\widehat{EBF}) = 105°$ olarak veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{ADG})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

$m(\widehat{EAH}) + m(\widehat{HDG}) + m(\widehat{FCG}) + m(\widehat{EBF}) = 360°$ (dış açıların ölçülerinin toplamı)

$3x + 5° + 5x - 40° + 90° + 105° = 360°$

$8x + 160° = 360°$

$8x = 200°$

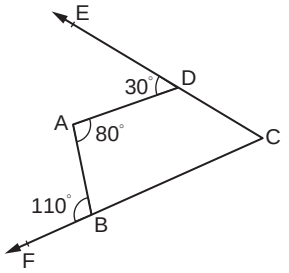
$x = 25°$ dir. Buradan $m(\widehat{HDC}) = 85°$ olur.

$m(\widehat{ADG}) + m(\widehat{HDG}) = 180°$

$m(\widehat{ADG}) + 85° = 180°$

$m(\widehat{ADG}) = 95°$ olarak bulunur.

Sıra Sizde 2



Yandaki şekilde ABCD dörtgen; E, D, C ve F, B, C noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{ADE}) = 30^\circ$, $m(\widehat{DAB}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{ABF}) = 110^\circ$ olarak veriliyor. **Buna göre $m(\widehat{FCE})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.**

3. Uygulama

Dörtgenlerde Açıortay Yardımıyla Elde Edilen Açı Özellikleri-1

Matematik yazılımından yararlanarak aşağıdaki adımları sırasıyla uygulayınız ve verilen soruları cevaplayınız.

1. adım: Araçlar bölümünden **Çokgen** aracını seçerek dışbükey dörtgen olacak şekilde bir ABCD dörtgeni oluşturunuz.

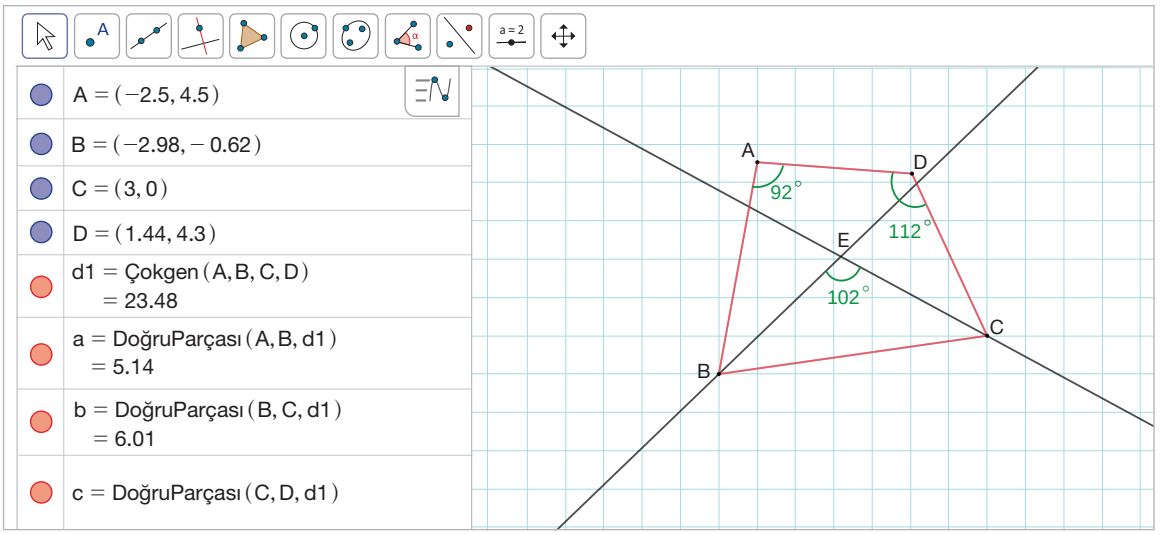
2. adım: Araçlar bölümünden **Açıortay** aracını seçerek ABC ve BCD açılarına ait açıortayları elde ediniz.

3. adım: Nokta bölümünden **Kesiştir** aracını seçerek ABC ve BCD açılarına ait açıortayları E noktasında kesiştiriniz.

4. adım: Ölçüm bölümünden **Açı** aracını seçerek BAD, ADC ve BEC açılarının ölçülerini elde ediniz.

5. adım: ABCD dörtgeninin köşe konumlarını hareket ettirip BAD, ADC ve BEC açıları arasındaki ilişkiyi gözlemleyiniz ve oluşabilecek açı ölçüleri ile uygulamanın 2. maddesinde verilen Tablo 1'deki ilgili boşlukları doldurunuz.

Bu adımlar uygulandığında matematik yazılımında oluşacak ABCD dörtgeninin benzer bir örneğinin görüntüsü aşağıda verilmiştir.



1. ABCD dörtgeninde BAD, ADC ve BEC açıları arasındaki ilişkiye dair varsayımlarınızı yazınız.

2. Elde ettiğiniz varsayımlardan genellemelere ulaşmak için matematik yazılımındaki 5. adımdan yararlanarak aşağıdaki tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

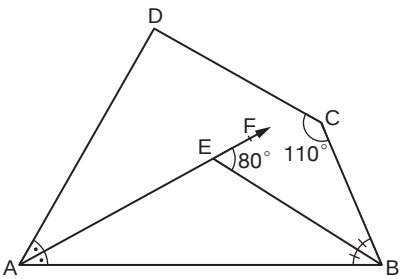
Tablo 1

$m(\widehat{BAD})$	$m(\widehat{ADC})$	$m(\widehat{BEC})$
92°	112°	102°

3. Tablodan elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak ABCD dörtgeninde BAD, ADC ve BEC açıları arasındaki ilişkiye dair örüntüleri genelleyiniz. Bu süreçte arkadaşlarınızın görüşlerini dinleyiniz, onların yapacağı genellemeler hakkındaki fikirlerinizi arkadaşlarınızla paylaşınız.

4. Yaptığınız varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak oluşabilecek herhangi bir ABCD dörtgeni için BAD, ADC ve BEC açılarına ilişkin önermelerinizi yazınız.

5. Dörtgenlerde açıortay yardımıyla elde edilen açı özelliklerine ilişkin yazdığınız önermeleri yeni durumlara uyarlayarak değerlendirmek için aşağıdaki soruyu cevaplayınız.

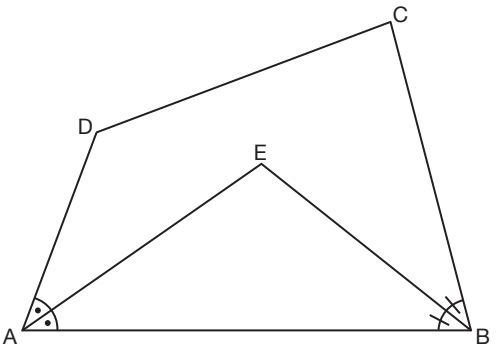


Yandaki ABCD dörtgeninde A, E ve F noktaları doğrusaldır. [AF ve [BE] iç açıortay, $m(\widehat{BCD}) = 110°$ ve $m(\widehat{BEF}) = 80°$ olarak veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{ADC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

6. Aşağıda dörtgenlerin açı özellikleriyle ilgili bir önerme verilmiştir.

Önerme: Bir dörtgende komşu iki iç açının açıortaylarının kesişimi ile oluşan açının ölçüsü diğer iki iç açının ölçüleri toplamının yarısına eşittir.



Verilenler: ABCD dörtgeni, $[AE]$ ve $[BE]$ sırasıyla DAB ve ABC iç açılarının açıortayları, $m(\widehat{C})$ ve $m(\widehat{D})$

İspatlanacak ifade:

$m(\widehat{AEB}) = \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$ dir.

Önermenin ispat adımlarının yer aldığı Tablo2 deki boşlukları tabloda verilen örneği ve aşağıdaki sıralı adımları dikkate alarak doldurunuz.

I. ABE üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamını yazınız.

II. ABCD dörtgeninin iç açılarının ölçüleri toplamını yazınız.

III. 2. adımda elde edilen eşitlikteki her terimi 2'ye bölünüz.

IV. 1 ve 3. adımlardan elde edilen eşitlikleri taraf tarafa çıkarınız.

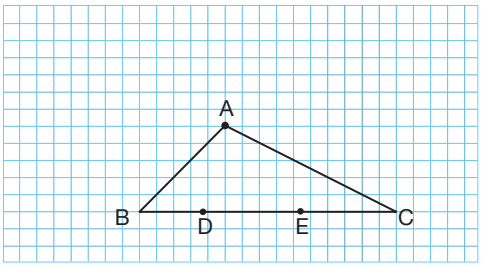
V. AEB açısının ölçüsünü bulunuz.

Tablo 2

Adım	İfadeler	Gerekçe
I.	$m(\widehat{E}) + \frac{m(\widehat{A})}{2} + \frac{m(\widehat{B})}{2} = 180^\circ$	ABE üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı yazıldı.
II.		ABCD dörtgeninin iç açılarının ölçülerinin toplamı yazıldı.
III.		Tabloda 2. adımda elde edilen eşitliğin her iki tarafı 2'ye bölündü.
IV.		Tablonun 1 ve 3. adımlarındaki eşitlikler taraf tarafa çıkarıldı.
V.		Tablonun 4. adımından elde edilen eşitlikten AEB açısının ölçüsü bulundu.

7. Elde ettiğiniz önermelerden birini 6. maddedeki ispat adımlarına benzer bir yöntem izleyerek ispatlayınız. Uyguladığınız ispatı kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

8. Elde ettiğiniz çıkarımları matematiksel modele dönüştürerek aşağıdaki gerçek yaşam durumu probleminde uygulayınız.



Yandaki şekilde birim kareli kâğıt üzerine çizilmiş ABC üçgeni ve [BC] üzerinde işaretli D ve E noktaları veriliyor. Gökçe, kâğıdı [AB] boyunca katlayarak [BC] üzerindeki E noktasının kâğıtta karşılık geldiği noktayı K olarak işaretliyor ve kâğıdı eski konumuna açarak düz hâle getiriyor. Daha sonra kâğıdı [AC] boyunca katlayarak [BC] kenarı üzerindeki D noktasının kâğıtta karşılık geldiği noktayı M olarak işaretliyor ve kâğıdı tekrar açarak düz hâle getiriyor. Gökçe B, K, M ve C noktalarını birleştirerek bir dörtgen elde ediyor.

$m(\widehat{BKM}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{KMC}) = 110^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

4. Uygulama

Dörtgenlerde Açıortay Yardımıyla Elde Edilen Açı Özellikleri-2

Matematik yazılımından yararlanarak aşağıdaki adımları sırasıyla uygulayınız ve verilen soruları cevaplayınız.

1. adım: Araçlar bölümünden **Çokgen** aracını seçerek dışbükey dörtgen olacak şekilde bir ABCD dörtgeni oluşturunuz.

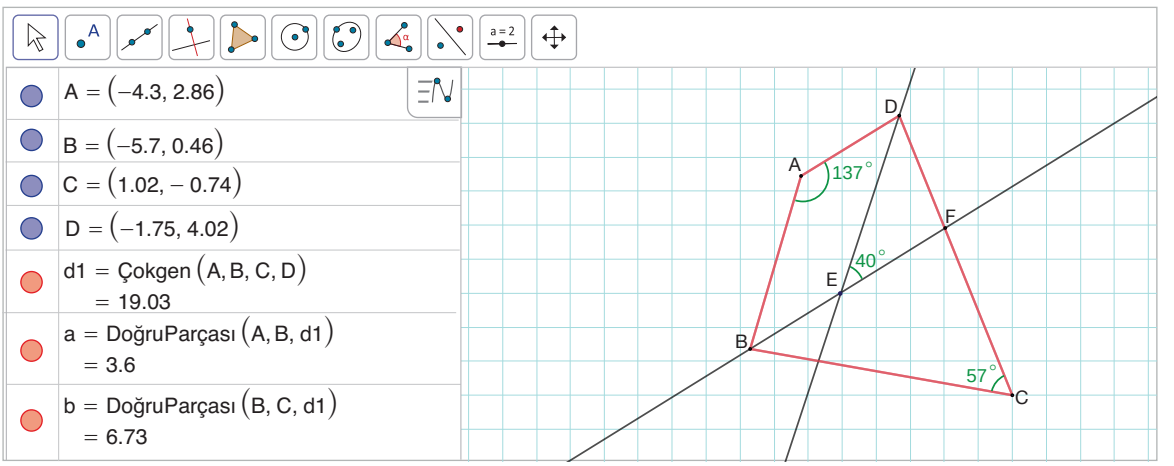
2. adım: Araçlar bölümünden **Açıortay** aracını seçerek ABC ve CDA açılarına ait açıortayları elde ediniz.

3. adım: Nokta bölümünden **Kesiştir** aracını seçerek ABC ve CDA açılarına ait açıortayları E noktasında, ABC açısına ait açıortay ile [CD] nı F noktasında kesiştiriniz.

4. adım: Ölçüm bölümünden **Açı** aracını seçerek BAD, BCD ve DEF açılarının ölçülerini elde ediniz.

5. adım: ABCD dörtgeninin köşe konumları hareket ettirip, BAD, BCD ve DEF açıları arasındaki ilişkiyi gözlemleyiniz ve oluşabilecek açı ölçüleri ile uygulamanın 2. maddesinde verilen Tablo 1'deki ilgili boşlukları doldurunuz.

Bu adımlar uygulandığında matematik yazılımında oluşacak ABCD dörtgeninin benzer bir örneğinin görüntüsü aşağıda verilmiştir.



1. ABCD dörtgeninin BAD, BCD ve DEF açıları arasındaki ilişkiye dair varsayımlarınızı yazınız.

2. Elde ettiğiniz varsayımlardan genellemeler oluşturmak için matematik yazılımındaki 5. adımdan yararlanarak aşağıdaki tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

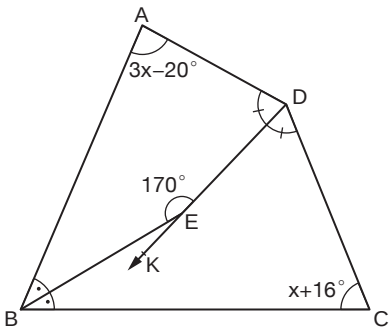
Tablo 1

$m(\widehat{BAD})$	$m(\widehat{BCD})$	$m(\widehat{DEF})$
137°	57°	40°

3. Tablodan elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak ABCD dörtgeninde BAD, BCD ve DEF açıları arasındaki ilişkiye dair örüntüleri genelleyiniz. Bu süreçte sınıf arkadaşlarınızın görüşlerini dinleyerek onların yapacağı genellemeler hakkındaki fikirlerinizi paylaşınız.

4. Yaptığınız varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak oluşabilecek herhangi bir ABCD dörtgeni için BAD, BCD ve DEF açılarına ilişkin önermelerinizi yazınız.

5. Dörtgenlerde açıortay yardımıyla elde edilen açı özelliklerine ilişkin yazdığınız önermeleri yeni durumlara uyarlayarak değerlendirmek için aşağıdaki soruyu cevaplayınız.

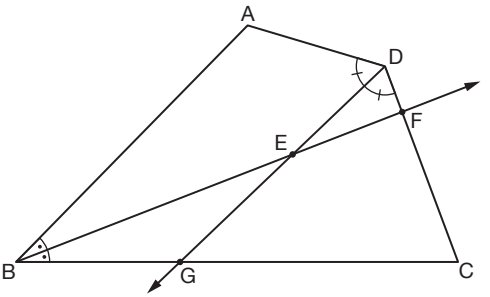


Yandaki şekilde ABCD bir dörtgen; D, E, K noktaları doğrusal, $[DK$ ve $[BE]$ sırasıyla ADC ve ABC iç açılarının açıortayı, $[DK \cap [BE] = \{E\}, m(\widehat{BCD}) = x + 16°$, $m(\widehat{BAD}) = 3x - 20°$ ve $m(\widehat{BED}) = 170°$ olarak veriliyor.

Buna göre x in alabileceği tam sayı değerleri toplamını bulunuz.

6. Aşağıda dörtgenlerin açı özellikleriyle ilgili bir önerme verilmiştir.

Önerme: Bir dörtgende karşı iki iç açının açıortaylarının oluşturduğu dar açının ölçüsü diğer iki iç açının ölçüleri farkının mutlak değerinin yarısına eşittir.



Verilenler: ABCD dörtgeni, $m(\widehat{A})$ ve $m(\widehat{C})$,

[BF ve [DG iç açıortaylar

İspatlanacak ifade:

$$m(\widehat{BEG}) = \frac{|m(\widehat{A}) - m(\widehat{C})|}{2}$$

Önermenin ispat adımlarının yer aldığı Tablo 2'deki boşlukları aşağıdaki sıralı adımları dikkate alarak verilen örnekteki gibi doldurunuz.

I. BEG üçgeninde iki iç açının ölçüleri toplamının kendilerine komşu olmayan bir dış açının ölçüsüne eşitliğinden yararlanarak $m(\widehat{DGC})$ nü yazınız.

II. DGC üçgeninin iç açıları ölçüleri toplamını yazınız.

III. 1. adımda elde edilen eşitliği 2. adımda yerine yazınız.

IV. ABCD dörtgeninin iç açıları ölçüleri toplamını yazınız daha sonra her terimi 2'ye bölünüz.

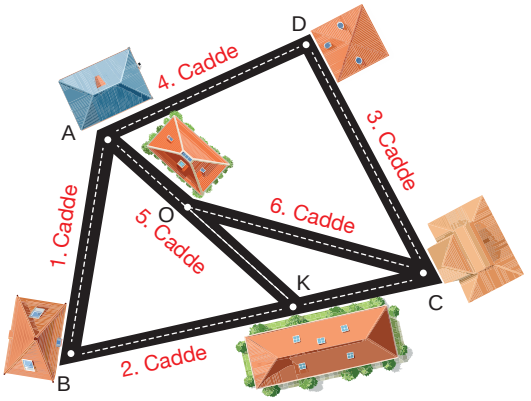
V. 3 ve 4. adımdan elde ettiğiniz eşitlikleri birbirine eşitleyerek $m(\widehat{BEG})$ nü yazınız.

Tablo 2

İşlem sırası	İfadeler	Gerekçe
I.	$m(\widehat{BEG}) + \frac{m(\widehat{B})}{2} = m(\widehat{DGC})$	İki iç açının ölçüleri toplamının, kendilerine komşu olmayan bir dış açının ölçüsüne eşit olması kuralı kullanıldı.
II.		DGC üçgeninin iç açılarının ölçülerinin toplamı yazıldı.
III.		Tablonun 1. adımında elde edilen DGC açısının ölçüsü, tablonun 2. adımında yerine yazıldı.
IV.		ABCD dörtgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı yazılarak her bir terim 2'ye bölündü.
V.		Tablonun 3 ve 4. adımlarından elde edilen eşitlikler birbirine eşitlenerek BEG açısının ölçüsü yazıldı.

7. Elde ettiğiniz önermelerden birini 6. maddedeki ispat adımlarına benzer bir yöntem izleyerek ispatlayınız. Uyguladığınız ispatı kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

8. Elde ettiğiniz çıkarımları matematiksel modele dönüştürerek aşağıdaki gerçek yaşam durumu probleminde uygulayınız.



Yandaki görselde Ayşe, Berke, Can ve Dilara'nın evleri, gittikleri okul ve kütüphane ile bunlar arasındaki caddeler gösterilmiştir. Binaların bulunduğu noktalar sırasıyla A, B, C, D, O ve K harfleriyle belirtilmiştir. ABCD dörtgeninde 5. Cadde A açısının, 6. Cadde ise C açısının iç açıortayıdır. $m(\widehat{ABC}) = 70^\circ$, $m(\widehat{ADC}) = 110^\circ$ A ve C noktalarında oluşan açıların iç açıortaylarının kesim noktası O noktası olarak veriliyor.

Buna göre

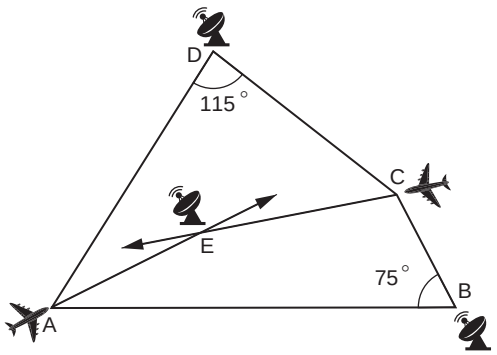
a) Dörtgenin açı özellikleri kullanılarak COK açısının ölçüsünün bulunup bulunamayacağını sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

b) COK açısının ölçüsünü 6. maddede verilen önerme yardımıyla bulunuz.

c) COK açısının ölçüsü bulunurken 6. maddede verilen önermenin kullanılmasının ne gibi kolaylıklar sağladığını değerlendiriniz.

3. Örnek

Primary Surveillance Radar (Primeriyi Sörveyılıns Radar) Birincil Gözetleme Radarı, hava araçlarında herhangi bir ilave donanım gerektirmeyen, hareketli tüm hedefleri tespit eden bir sistemdir.



Sistem, radardan iletilen elektromanyetik dalganın bir hedeften yansıyarak radara geri gelmesi prensibine dayanır.

A ve C konumlarında bulunan uçakların B, E ve D konumlarındaki radarlara göre oluşturduğu görüntünün iki boyutlu olarak modellenmiş hâli yanda verilmiştir. A ve C konumlarında bulunan uçakların E noktasındaki radara göre oluşturdukları doğrusal yollar, uçakların bulundukları köşeleri oluşturan komşu kenarlara eşit uzaklıktadır.

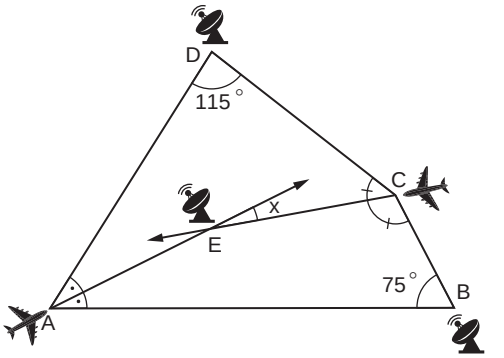
$m(\widehat{B}) = 75^\circ$ ve $m(\widehat{D}) = 115^\circ$ olduğuna göre uçakların rotalarının kesiştiği E noktasındaki dar açının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

Uçaklar, bulundukları köşeyi oluşturan komşu kenarlara eşit uzaklıkta ilerlediklerinde, o köşenin açıortayı üzerinde hareket etmiş olacaklardır.

E noktasındaki dar açının ölçüsü x olmak üzere

$x = \frac{|115^\circ - 75^\circ|}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$ olarak bulunur.



Sıra Sizde 3

ABCD dörtgeni şeklindeki bir parkın A ve B köşelerine birer dron yerleştirilmiştir. Dronlar bulundukları köşelerin iç açıortayı doğrultusunda uçabilmektedir. Dronların uçuş doğrultuları arasındaki açının ölçüsünün 105° olduğu bilinmektedir.

Buna göre C ve D köşelerinin iç açı ölçüleri toplamının kaç derece olduğunu bulunuz.

Ek soruların yer aldığı 1. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Dörtgende açı)

5. Uygulama

Dörtgenlerin Kenar Uzunlukları Arasındaki İlişkiyi Bulma

Aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları yanıtlayınız.

1. Dörtgen, yamuk, ikizkenar yamuk, dik yamuk, paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen ve karenin kenarları arasındaki eşlik, paralellik ve diklik özelliklerine ilişkin varsayımlarınızı aşağıdaki boşluğa yazınız.

2. Elde ettiğiniz varsayımlardan genellemeler oluşturmak için aşağıda verilen matematik yazılımı ile ilgili adımları uygulayınız.

   1. adım: Araçlar bölümünden **Doğru** aracını seçiniz. Ekranda yatay olacak şekilde herhangi iki nokta seçerek A ve B noktalarını belirleyiniz.

2. adım: Araçlar bölümünde **Paralel Doğru** aracını seçiniz. AB doğrusunu seçerek bu doğruya paralel başka bir doğru oluşturunuz. Bunu yaptığınızda AB doğrusuna paralel olan doğru üzerinde bir C noktası oluşacaktır.

3. adım: Nokta aracını seçerek C noktasının olduğu doğru üzerinde ve C noktasının solunda kalacak şekilde herhangi bir D noktası belirleyiniz.

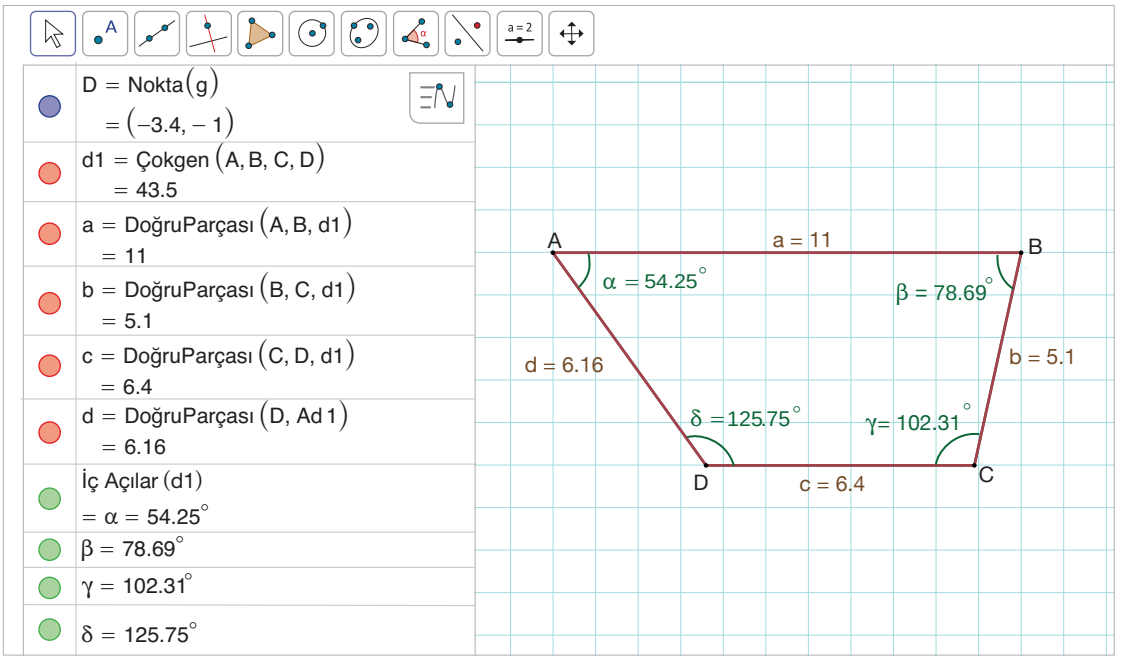
4. adım: Çokgen aracını seçerek sırasıyla A, B, C, D noktalarını ve yeniden A noktasını işaretleyiniz.

5. adım: Nesneyi Göster/Gizle aracını seçerek çokgen dışındaki doğruları seçiniz.

6. adım: Araçlar bölümünden **Açı** aracını seçerek dörtgen içindeki bölgeyi işaretleyiniz.

7. adım: Uzaklık veya **Uzunluk** aracını seçerek tüm kenarları işaretleyiniz.

Bu adımlar uygulandığında matematik yazılımında oluşacak ABCD dörtgeninin benzer bir örneğinin görüntüsü aşağıda verilmiştir.



8. adım: Taşı aracını seçiniz, aşağıdaki maddelerde verilen yönergeleri sırasıyla uygulayarak elde ettiğiniz özel dörtgenler ile ilgili bilgileri Tablo 1'de ilgili alanlara örnekteki gibi yazınız.

a) İkizkenar yamuk elde edebilmek için AD ve BC kenar uzunlukları eşit oluncaya kadar C ve D köşelerini hareket ettiriniz.

b) Dik yamuk elde edebilmek için D köşesindeki açının ölçüsü 90° oluncaya kadar D köşesini hareket ettiriniz.

c) Paralelkenar elde edebilmek için A ile C ve B ile D açı ölçüleri eşit oluncaya kadar D noktasını sağa ve sola hareket ettiriniz.

ç) Eşkenar dörtgen elde edebilmek için AB ve BC kenar uzunlukları eşit oluncaya kadar A köşesini sağa ve sola hareket ettiriniz.

d) Dikdörtgen elde edebilmek için köşelerde oluşan açı ölçüleri 90° oluncaya kadar C köşesini hareket ettiriniz.

e) Kare elde edebilmek için AB ve BC kenar uzunlukları eşit oluncaya kadar C köşesini hareket ettiriniz.

Tablo 1

	İfadeler			
	Bütün kenar uzunlukları eşittir.	**Karşılıklı kenar uzunlukları eşittir.**	**Karşılıklı kenarları birbirine paraleldir.**	**Kenarları dik kesişir.**
Dörtgen				
Yamuk				
İkizkenar yamuk				
Dik yamuk				
Paralelkenar				
Eşkenar dörtgen	✓			
Dikdörtgen				
Kare	✓			

3. Tablodan elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak dörtgenlerin kenar özelliklerine ilişkin örüntüleri genelleyiniz. Bu süreçte sınıf arkadaşlarınızın görüşlerini dinleyerek onların yapacağı genellemeler hakkındaki fikirlerinizi paylaşınız.

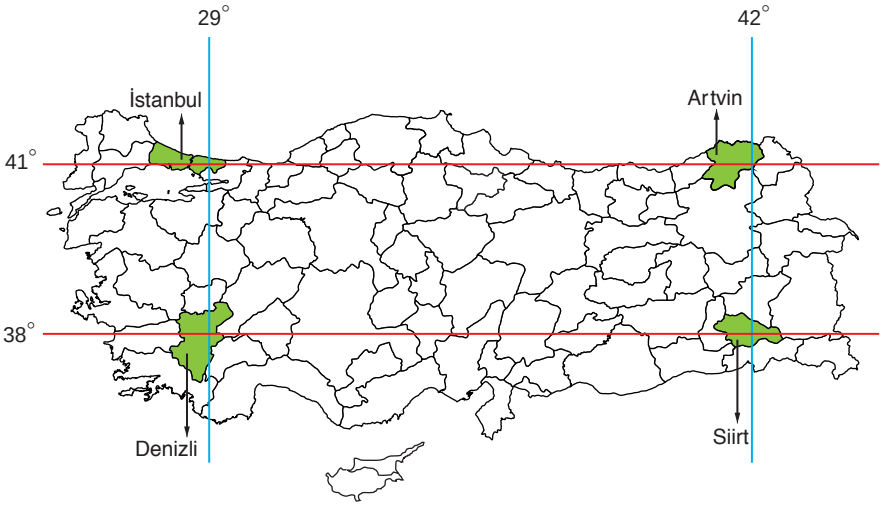
4. Yaptığınız varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak dörtgenlerin kenar özelliklerine ilişkin önermelerinizi aşağıdaki boşluğa yazınız.

5. Dörtgenlerin kenar özelliklerine ilişkin yazdığınız önermeleri yeni durumlara uyarlayarak değerlendirmek için aşağıdaki bilgileri kullanarak verilen soruyu cevaplayınız.

Bekir Öğretmen, coğrafya dersinde paralel ve meridyenlerle ilgili olarak öğrencilere şu bilgileri vermiştir:

- Paralel ve meridyenler Dünya üzerinden geçtiği varsayılan (sanal) çizgilerdir.
- Paraleller enlemesine (doğu-batı yönünde) çizgilerdir ve ardışık paraleller arası uzaklık her yerde yaklaşık olarak 111 km'dir.
- Meridyenler boylamasına (kuzey-güney yönünde) çizgilerdir ve ardışık meridyenler arası uzaklık ekvator üzerinde yaklaşık 111 km'dir. Ancak Türkiye üzerinden geçen meridyenler arası uzaklık yaklaşık 85 km kabul edilir.

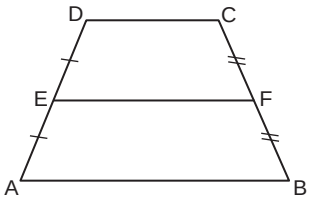
Aşağıdaki haritada İstanbul, Denizli, Artvin ve Siirt şehir merkezlerinden geçen paralel ve meridyen değerleri verilmiştir.



Bekir Öğretmen'in verdiği bilgiler ile haritadaki şehirlerin paralel ve meridyen değerlerini kullanarak oluşturulacak dörtgenin çevre uzunluğunun yaklaşık kaç km olduğunu bulunuz.

6. Aşağıda dörtgenlerin kenar özellikleri ile ilgili bir önerme verilmiştir.

Önerme: Yamuğun yan kenarlarının orta noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğu alt ve üst taban uzunlukları toplamının yarısına eşittir.



Verilenler: ABCD yamuğunda $[AB] \,//\, [EF] \,//\, [DC]$; E ve F noktaları sırasıyla AD ve BC kenarlarının orta noktalarıdır.

İspatlanacak ifade:

$|EF| = \dfrac{|AB| + |DC|}{2}$ dir.

Önermenin aşağıda verilen ispat adımlarındaki boşlukları uygun şekilde doldurunuz.

I. AC köşegenini çiziniz.

II. $[AC] \cap [EF] = \{T\}$ olarak belirleyiniz.

III. ACD üçgeninde benzerlikten $|ET| = \dfrac{\cdots\cdots}{2}$

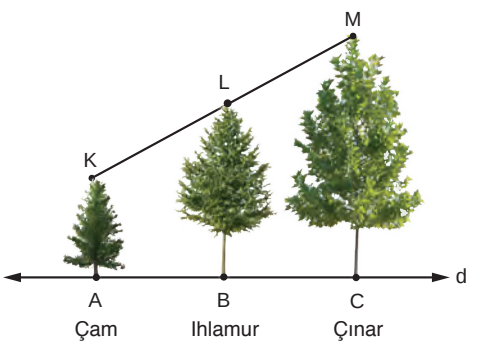
IV. ACB üçgeninde benzerlikten $|TF| = \frac{\cdots\cdots}{2}$

V. $|EF| = |....| + |....|$ olduğundan $|EF| = \frac{|AB| + |DC|}{2}$ elde edilir.

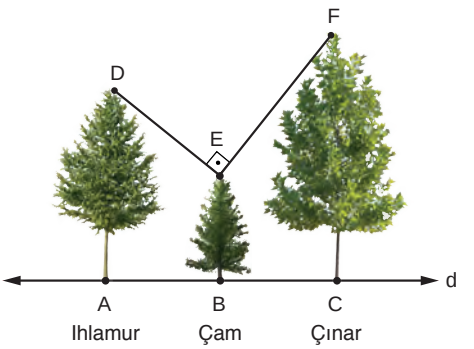
7. Elde ettiğiniz önermelerden birini 6. maddedeki ispat adımlarına benzer bir yöntem izleyerek ispatlayınız. Uygulaadığınız ispatı kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

8. Elde ettiğiniz çıkarımları matematiksel modele dönüştürerek aşağıdaki gerçek yaşam durumu probleminde uygulayınız.

"Yeşil Vatan" için yanan ormanların yeniden oluşturulması amacıyla T.C. Orman Genel Müdürlüğü "Ormanlar sadece ağaç değil; hayattır." sloganıyla boyları sırasıyla 120 cm, 140 cm ve 160 cm olan çam, ıhlamur ve çınar ağaçlarını Şekil 1'deki sıralamayla dikmeyi planlamaktadır. K, L ve M noktaları doğrusaldır, $[AK] \parallel [BL] \parallel [CM]$, $[AK] \perp d$ olarak veriliyor.



Şekil 1



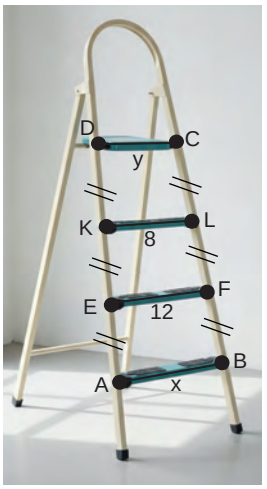
Şekil 2

Dikilen noktalar sabit kalmak üzere üç ağaç Şekil 2'deki gibi dikildiğinde $m(\widehat{DEF}) = 90^\circ$ olmaktadır. Şekil 1 ve Şekil 2'de sırasıyla K, L, M ve D, E, F noktaları ağaçların uç noktalarıdır.

Buna göre $|AC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

Konu ile ilgili videoya yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

4. Örnek

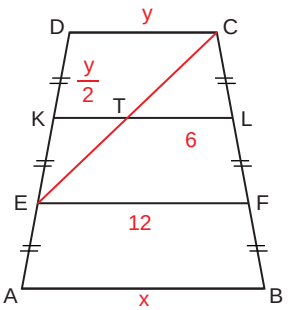


Şekilde düz bir zeminde verilen katlanabilir merdivende $[AB] \,//\, [DC]$, $|AE| = |EK| = |KD| = |BF| = |FL| = |LC|$, $|AB| = x$ cm, $|DC| = y$ cm, $|KL| = 8$ cm ve $|EF| = 12$ cm olarak veriliyor.

Buna göre $x + y$ işleminin kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

Merdivenin basamaklarının yer aldığı bölüm, ABCD yamuğu şeklinde modellenmiştir.

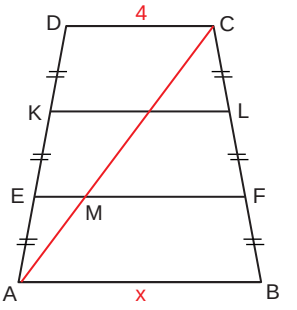


$[EC] \cap [KL] = \{T\}$ olacak şekilde $[EC]$ çizildiğinde EKT ve EDC üçgenlerinde Açı-Açı benzerliğinden $|KT| = \frac{y}{2}$, CEF ve CTL üçgenlerinde Açı-Açı benzerliğinden $|TL| = \frac{12}{2} = 6$ cm olur.

Buradan $|KL| = 8 = \frac{y}{2} + 6$

$\frac{y}{2} = 2 \Rightarrow y = 4$ cm olarak bulunur.

$[AC] \cap [EF] = \{M\}$ olacak şekilde $[AC]$ çizilirse



AEM ve ADC üçgenlerinde Açı-Açı benzerliğinden $\frac{|EM|}{|DC|} = \frac{|AE|}{|AD|}$

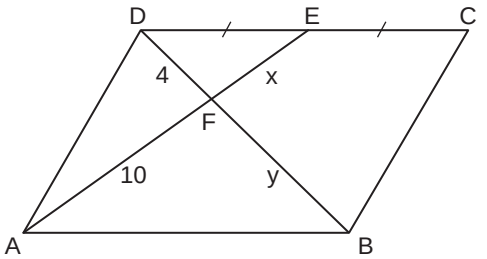
$\frac{|EM|}{4} = \frac{1}{3} \Rightarrow |EM| = \frac{4}{3}$ cm olur.

$|EF| = |EM| + |MF| \Rightarrow 12 = \frac{4}{3} + |MF| \Rightarrow |MF| = 12 - \frac{4}{3} \Rightarrow |MF| = \frac{32}{3}$ cm olur.

CMF ve CAB üçgenlerinde Açı-Açı benzerliğinden $\frac{|MF|}{|AB|} = \frac{|CF|}{|CB|} \Rightarrow \frac{\frac{32}{3}}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2x = 32 \Rightarrow x = 16$ olur.

Buradan $16 + 4 = 20$ cm olarak bulunur.

Sıra Sizde 4



Yandaki ABCD paralelkenarında D, E, C noktaları doğrusal, $[AE] \cap [BD] = \{F\}$, $|DE| = |EC|$, $|AF| = 10$ cm, $|DF| = 4$ cm, $|EF| = x$ cm ve $|BF| = y$ cm olarak veriliyor.

Buna göre x + y işleminin sonucunun kaç cm olduğunu bulunuz.

6. Uygulama

Dörtgenlerin Köşegenleri Arasındaki İlişkiyi Bulma

Aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları yanıtlayınız.

1. Dörtgen, yamuk, ikizkenar yamuk, dik yamuk, paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen ve karenin köşegen uzunluklarının eşit olması, köşegenlerinin dik kesişmeleri, birbirlerini ortalamaları, oranlı bölünüp bölünemedikleri ve iç açıortay olup olmadıklarına ilişkin varsayımlarınızı yazınız.

2. Elde ettiğiniz varsayımlardan genellemeler oluşturmak için aşağıda verilen matematik yazılımı ile ilgili adımları uygulayınız.

   1. adım: **Araçlar** bölümünden **Doğru** aracını seçiniz. Ekranda yatay olacak şekilde soldan sağa doğru sırasıyla A ve B noktalarını belirleyiniz.

   2. adım: **Araçlar** bölümünden **Paralel Doğru** aracını seçiniz. AB doğrusunu seçerek bu doğruya paralel başka bir doğru oluşturunuz. Bunu yaptığınızda AB doğrusuna paralel olan doğru üzerinde bir C noktası oluşacaktır.

   3. adım: **Nokta** aracını seçerek C noktasının bulunduğu doğru üzerinde, C noktasının solunda kalacak şekilde herhangi bir D noktası belirleyiniz.

   4. adım: **Çokgen** aracını seçerek sırasıyla A, B, C, D noktalarını ve yeniden A noktasını işaretleyiniz.

   5. adım: **Nesneyi Göster/Gizle** aracını seçerek çokgen dışındaki doğruları seçiniz.

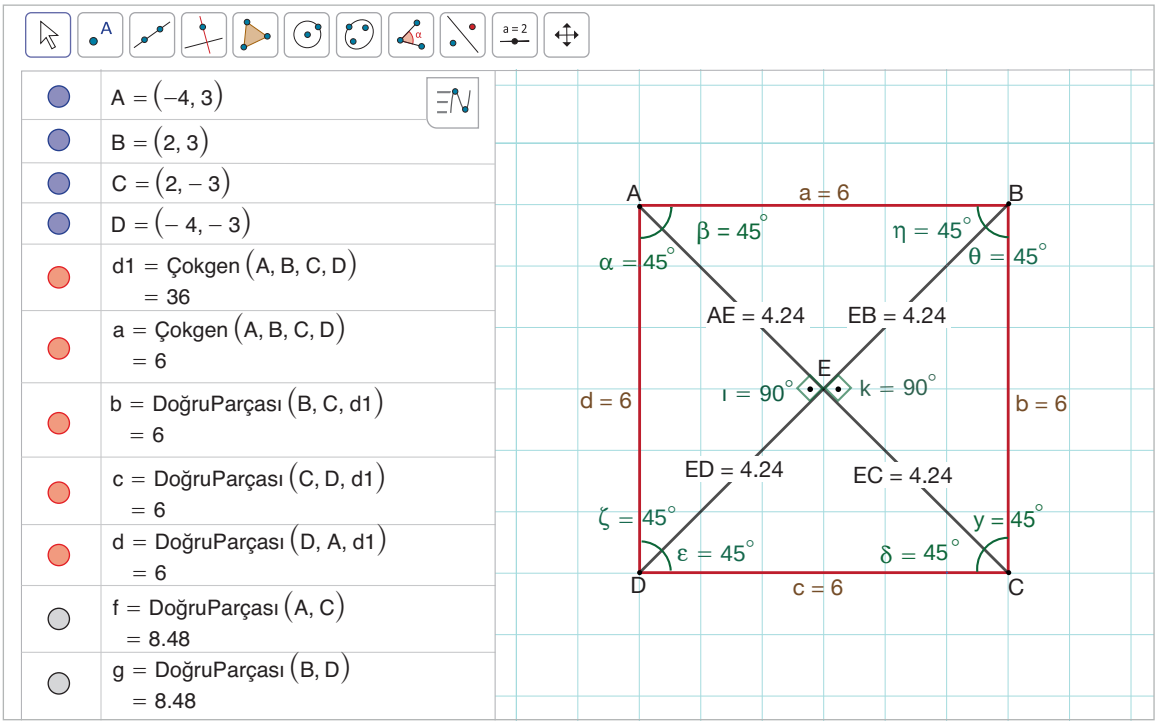
6. adım: Araçlar bölümünden **Doğru Parçası** aracını seçerek A ile C ve B ile D noktalarını birleştiriniz.

7. adım: Araçlar bölümünden **Kesiştir** aracını seçerek AC ve BD doğru parçalarını işaretleyiniz. Böylece E noktası oluşacaktır.

8. adım: Uzaklık veya Uzunluk aracını seçerek sırasıyla A ile E, E ile C, B ile E, E ile D, A ile B, B ile C, C ile D, D ile A noktalarını seçiniz. Böylece AE, EC, BE, ED, AB, BC, CD ve DA doğru parçalarının uzunlukları bulunmuş olacaktır.

9. adım: Araçlar bölümünden **Açı** aracını seçerek sırasıyla D, A ve E noktalarını seçiniz. Böylece ekranda DAE açısının ölçüsü yazılmış olacaktır. Benzer şekilde EAB, ABE, EBC, BCE, ECD, CDE, EDA, AED, AEB, BEC ve CED açılarının ölçülerini de bulunuz.

Bu adımları uyguladığınızda matematik yazılımında oluşacak ABCD dörtgeninin benzer bir örneğinin görüntüsü aşağıda verilmiştir.



10. adım: Taşı aracını seçiniz, aşağıdaki maddelerde verilen yönergeleri sırasıyla uygulayarak elde ettiğiniz özel dörtgenler ile ilgili bilgileri Tablo 1'de ilgili alanlara örnekteki gibi yazınız.

a) İkizkenar yamuk elde edebilmek için AD ve BC kenar uzunlukları eşit oluncaya kadar C ve D köşelerini hareket ettiriniz.

b) Dik yamuk elde edebilmek için D köşesindeki açının ölçüsü 90° oluncaya kadar D köşesini hareket ettiriniz.

c) Paralelkenar elde edebilmek için A ile C ve B ile D açı ölçüleri eşit oluncaya kadar D noktasını sağa ve sola hareket ettiriniz.

ç) Eşkenar dörtgen elde edebilmek için AB ve BC kenar uzunlukları eşit oluncaya kadar A köşesini sağa ve sola hareket ettiriniz.

d) Dikdörtgen elde edebilmek için köşelerde oluşan açı ölçüleri 90° oluncaya kadar C köşesini hareket ettiriniz.

e) Kare elde edebilmek için AB ve BC kenar uzunlukları eşit oluncaya kadar C köşesini hareket ettiriniz.

Tablo 1

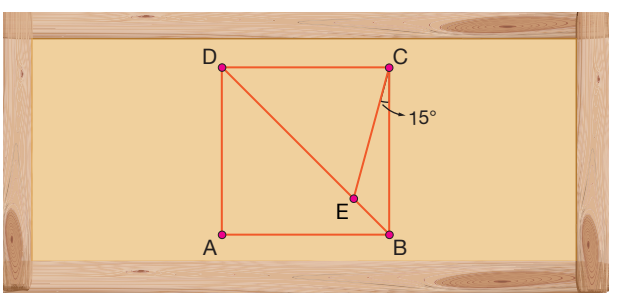
	İfadeler				
	Köşegen uzunlukları eşittir.	**Köşegenler birbirini oranlı olarak böler.**	**Köşegenler birbirini ortalar.**	**Köşegenler dik kesişir.**	**Köşegenler iç açıortaydır.**
Dörtgen					
Yamuk		✓			
İkizkenar yamuk		✓			
Dik yamuk		✓			
Paralelkenar		✓			
Eşkenar dörtgen		✓			
Dikdörtgen		✓			
Kare		✓			

3. Tablodan elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak dörtgenlerin köşegenleri arasındaki örüntüleri genelleyiniz. Bu süreçte arkadaşlarınızın görüşlerini dinleyerek onların yapacağı genellemeler hakkındaki fikirlerinizi paylaşınız.

4. Yaptığınız varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak dörtgenlerin köşegenleri arasındaki ilişkilere ait önermelerinizi yazınız.

5. Dörtgenlerin köşegen özelliklerine ilişkin yazdığınız önermeleri yeni durumlara uyarlayarak değerlendirmek için aşağıdaki soruyu cevaplayınız.

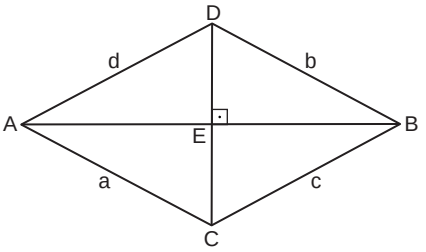
Aşağıdaki görselde bir sınıf panosunda A, B, C ve D noktalarından sabitlenmiş raptiyelerin etrafından gergin bir ip geçirilerek ABCD karesi oluşturulmuştur.



Daha sonra B ve D noktalarını birleştiren gergin bir ip çekiliyor ve $m(\widehat{BCE}) = 15^\circ$ olacak şekilde BD köşegeni üzerindeki E noktasından bir ip raptiye ile C noktasına sabitleniyor. $|CE| = 60$ cm olduğuna göre ABCD karesinin çevresi için kullanılan ipin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

6. Aşağıda dörtgenlerin köşegen özellikleriyle ilgili bir önerme verilmiştir.

Önerme: Köşegenleri dik kesişen herhangi bir dörtgende karşılıklı kenar uzunluklarının kareleri toplamı birbirine eşittir.



Verilenler:

ACBD dörtgeninde $[AB] \cap [CD] = \{E\}$, $[AB] \perp [CD]$, $|AC| = a$ birim, $|CB| = c$ birim, $|BD| = b$ birim ve $|AD| = d$ birim

İspatlanacak ifade:

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ dir.

Verilen önermeyi matematik yazılımı kullanarak ispatlayınız.

1. adım: Araçlar bölümünden **Doğru Parçası** aracını seçiniz ve AB doğru parçasını oluşturunuz.

2. adım: Nokta aracını seçerek $[AB]$ nın üzerinde olmayan bir C noktası belirleyiniz.

3. adım: Dik Doğru aracını seçerek önce $[AB]$ nı sonra C noktasını seçiniz. Ekranda $[AB]$ na dik olan C noktasından geçen bir doğru oluşacaktır.

4. adım: Nokta aracını seçerek oluşturduğunuz dik doğru üzerinde $[AB]$ na göre C noktasının bulunduğu tarafta olmayan bir D noktası belirleyiniz.

5. adım: Çokgen aracını seçerek sırasıyla A, C, B, D noktalarını ve yeniden A noktasını işaretleyiniz.

6. adım: Nesneyi Göster/Gizle aracını seçerek CD doğrusunu seçiniz.

7. adım: Doğru Parçası aracını seçerek C ile D noktalarını birleştiriniz.

8. adım: Kesiştir aracını seçerek $[AB]$ ve $[CD]$ nı işaretlediğinizde E noktası oluşacaktır.

9. adım: Açı aracını seçerek $[CD]$ ve $[AB]$ nı işaretlediğinizde $m(\widehat{E}) = 90^\circ$ oluşacaktır.

10. adım: Giriş bölümüne $a^2 + b^2$ yazıp **Enter** tuşuna basınız. Ekranda $a^2 + b^2$ değeri oluşacaktır.

11. adım: Giriş bölümüne $c^2 + d^2$ yazıp **Enter** tuşuna basınız. Ekranda $c^2 + d^2$ değeri oluşacaktır.

12. adım: A, B, C ve D köşelerinden herhangi birini hareket ettirerek 10 ve 11. adımlarda elde edilen değerlerdeki değişimi gözlemleyiniz.

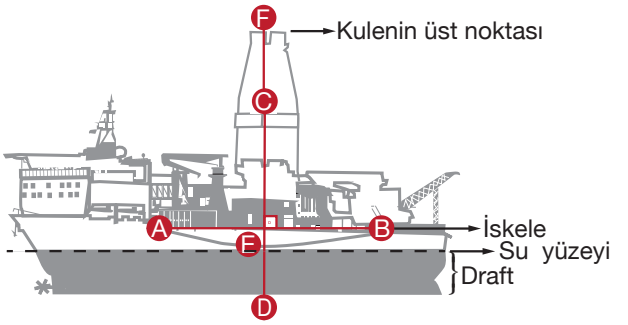
7. Elde ettiğiniz önermelerden birini 6. maddedeki ispat adımlarına benzer bir yöntem izleyerek ispatlayınız. Uyguladığınız ispatı kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

8. Elde ettiğiniz çıkarımları matematiksel modele dönüştürerek aşağıdaki gerçek yaşam durumu probleminde uygulayınız.

Türkiye için hem stratejik ve ekonomik hem de enerji güvenliği açısından son derece önemli araçlardan olan sondaj gemileri, son yıllarda ülkemizin yatırım yaparak envanterine kattığı ve enerji bağımsızlığı yolunda kritik öneme sahip olan unsurlardan biridir. Görsel 1'de Türkiye'nin ilk sondaj gemisi olan Fatih, Görsel 2'de geminin iki boyutlu olarak modellenmiş görüntüsü verilmiştir.



Görsel 1



Görsel 2

Fatih sondaj gemisinin özellikleri aşağıda verilmiştir.

- Uzunluğu yaklaşık 229 metre
- Sondaj kulesinin yüksekliği 64 metre
- Draftı 16 metre (Draft: Geminin altı ile su yüzeyi arasındaki dikey mesafedir.)
- İskelenin denizden yüksekliği 4 metre

Bir teknisyen keşif yapmak için sondaj kulesi üzerindeki C noktasına çıkmıştır. İskele üzerinde A noktasında bulunan mühendisin teknisyene olan uzaklığı 75 metre ve draftın uç noktası olan D noktasına uzaklığı $20\sqrt{10}$ metredir. B noktasında bulunan mühendisin ise teknisyene olan uzaklığı $5\sqrt{145}$ metredir. A, E ve B noktaları ile F, C, E ve D noktaları doğrusal noktalar olmak üzere $[AB] \cap [CD] = \{E\}$, $[AB] \perp [CD]$ olarak veriliyor.

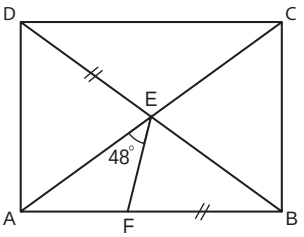
Buna göre

a) "C noktasının sondaj kulesinin en üstünde bulunan F noktasına olan uzaklığının kaç metre olduğu üçgende pisagor bağıntısı kullanılarak nasıl hesaplanabilir?" sorusu üzerine tartışınız.

b) C noktasının sondaj kulesinin en üstünde bulunan F noktasına olan uzaklığının kaç metre olduğunu 6. maddede verilen dörtgen özelliğini kullanarak bulunuz.

c) a ve b maddelerinde yapmış olduğunuz çözümleri karşılaştırarak b maddesinde yapılan çözümün nasıl bir kolaylık sağladığını tartışınız.

5. Örnek

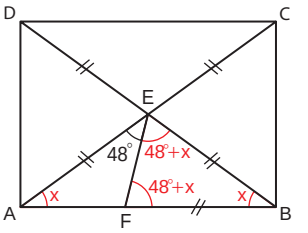


Yandaki ABCD dikdörtgeninde $[AC]$ ve $[BD]$ köşegen, $[AC] \cap [BD] = \{E\}$, $F \in [AB], |DE| = |FB|$ ve $m(\widehat{AEF}) = 48^\circ$ olarak veriliyor.

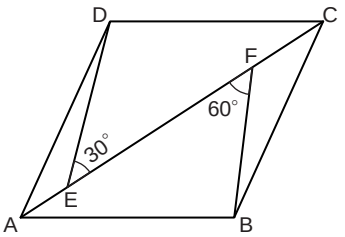
Buna göre $m(\widehat{CAB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

Dikdörtgende köşegenler birbirini eşit olarak böleceğinden $|AE|=|EC|=|DE|=|EB|$ olur. $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{ABE}) = x$ olsun. Bu durumda $m(\widehat{EFB}) = 48^\circ + x$ olur. $|BF| = |BE|$ olduğundan $m(\widehat{BEF}) = 48^\circ + x$ olur. BEF üçgeninde iç açılarının ölçüleri toplamından $48^\circ + x + 48^\circ + x + x = 180^\circ$ olur. Buradan $3x + 96^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3x = 84^\circ \Rightarrow x = 28^\circ \Rightarrow m(\widehat{CAB}) = 28^\circ$ olarak bulunur.



Sıra Sizde 5



Yandaki ABCD eşkenar dörtgeninde AC köşegeni üzerindeki iki nokta E ve F olmak üzere $m(\widehat{DEC}) = 30^\circ$, $m(\widehat{AFB}) = 60^\circ$ ve $|DE| = 12$ cm olarak veriliyor.

Buna göre $|FB|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

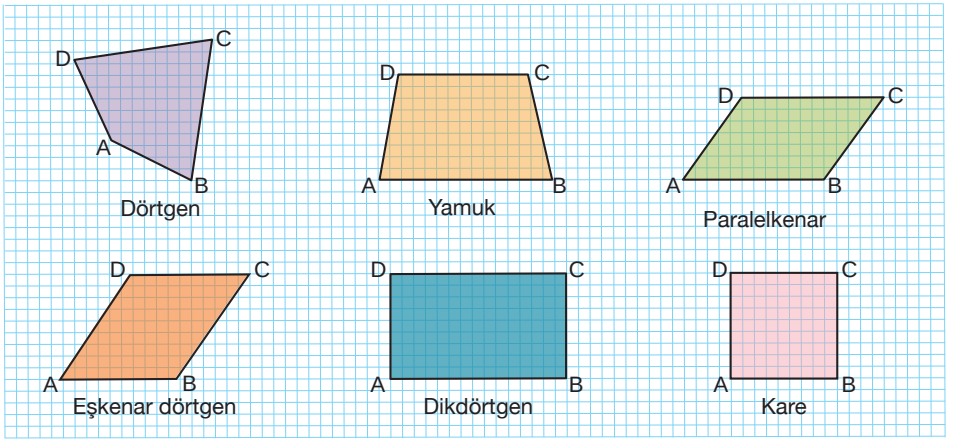
Ek soruların yer aldığı 2. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Dörtgende kenar uzunlukları)

7. Uygulama

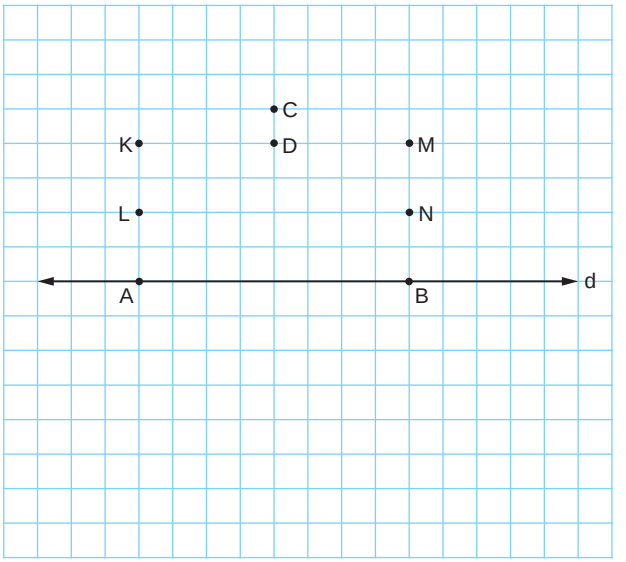
Dörtgenlerde Simetri

Aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları yanıtlayınız.

1. Aşağıda birim kareli zemin üzerine çizilmiş bazı dörtgenlere ait şekiller verilmiştir. Şekilleri inceleyerek dörtgenlerin simetri özelliklerine ilişkin varsayımlarınızı yazınız.



2. Aşağıda birim kareli zemin üzerinde çizilmiş bir d doğrusu ve işaretlenmiş bazı noktalar verilmiştir. Elde ettiğiniz varsayımlardan genellemeler oluşturabilmeniz için verilen işlem basamaklarını uygulayarak soruları cevaplayınız.



I. ABC üçgenini oluşturup d doğrusuna göre simetriğini alınız ve elde ettiğiniz dörtgeni tanımlayınız.

II. ABD üçgenini oluşturup d doğrusuna göre simetriğini alınız ve elde ettiğiniz dörtgeni tanımlayınız.

III. ABNL dörtgenini oluşturup d doğrusuna göre simetriğini alınız ve elde ettiğiniz şekli tanımlayınız.

IV. ABMK dörtgenini oluşturup d doğrusuna göre simetriğini alınız ve elde ettiğiniz şekli tanımlayınız.

V. ABNK dörtgenini oluşturup d doğrusuna göre simetriğini alınız ve elde ettiğiniz şekli tanımlayınız.

3. 2. maddede verdiğiniz cevaplardan yararlanarak aşağıdaki tabloyu örnekteki gibi doldurunuz. Tablodan elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak dörtgenlerin simetri özelliklerine dair örüntüleri genelleyiniz. Bu süreçte sınıf arkadaşlarınızın görüşlerini dinleyerek onların yapacağı genellemeler hakkındaki fikirlerinizi paylaşınız.

	İfadeler					
	Köşegenleri simetri eksenidir.	**Karşılıklı paralel kenarlarının orta noktalarından simetri ekseni geçer.**	**Bir tane simetri ekseni vardır.**	**İki tane simetri ekseni vardır.**	**Dört tane simetri ekseni vardır.**	**Simetri ekseni yoktur.**
Dörtgen						
Yamuk						
İkizkenar yamuk		✓				
Dik yamuk						
Paralelkenar						
Eşkenar dörtgen						
Dikdörtgen		✓				
Kare		✓				

4. Yaptığınız varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak dörtgenlerin simetri özelliklerine ilişkin önermelerinizi yazınız.

5. Dörtgenlerin simetri özelliklerine ilişkin yazdığınız önermeleri yeni durumlara uyarlayarak değerlendirmek için aşağıdaki soruyu cevaplayınız.

Badminton oynayan Ahmet, Burak, Ceren ve Dilek isimli dört arkadaş antrenman yapmak için sırasıyla A, B, C ve D noktalarına yerleşerek ABCD dörtgeni oluşturuyorlar. $|AC| = 12$ metre ve $|BD| = 16$ metre olarak veriliyor. ABCD dörtgeninin köşegenleri aynı zamanda simetri ekseni olduğuna göre ABCD dörtgeninin çevre uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

6. Aşağıda karenin simetri özellikleri ile ilgili bir önerme verilmiştir.

Önerme: Karenin karşılıklı kenarlarının orta noktalarından geçen doğrular simetri eksenidir.

Verilen önermeyi matematik yazılımı kullanarak ispatlayınız.

1. adım: Araçlar bölümünden **Düzgün Çokgen** aracını seçerek ardından A, B noktalarını seçtiğinizde gelen sekmede 4 sayısını seçerek ABCD karesini oluşturunuz.

2. adım: Nokta aracından **Orta Nokta veya Merkez** aracını seçtiğinizde AB kenarı ve ardından CD kenarını seçtiğinizde E ve F noktaları oluşacaktır.

3. adım: Doğru aracını seçerek E ve F noktalarından geçen bir doğru çiziniz.

4. adım: Doğruda Yansıt aracını seçerek AD doğru parçası ve EF doğrusu seçildiğinde D′ noktası ile C noktasının ve A′ noktası ile B noktasının üst üste geldiği görülecektir.

7. Elde ettiğiniz önermelerden birini 6. maddedeki ispat adımlarına benzer bir yöntem izleyerek ispatlayınız. Uyguladığınız ispatı kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

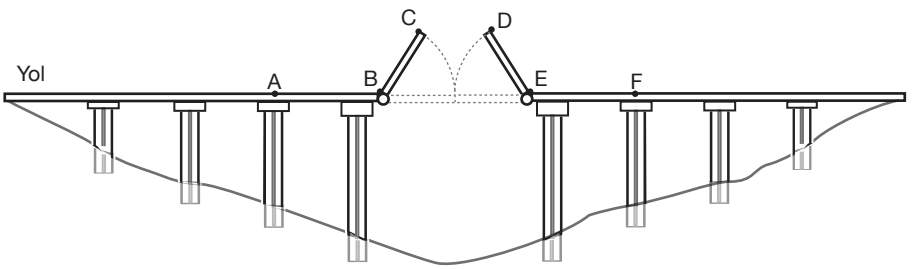
8. Elde ettiğiniz çıkarımları matematiksel modele dönüştürerek aşağıdaki gerçek yaşam durumu probleminde uygulayınız.

Haliç'i birleştiren Galata Köprüsü, kırkar metre uzunluğunda açılır kanatlara sahip olup toplam 490 metre uzunluğundadır (Görsel 1).



Görsel 1

Galata Köprüsü'nün açılmış hâlinin iki boyutlu olarak modellenmiş görüntüsü Görsel 2 'de verilmiştir. Köprünün açılır kanatları birbirlerine simetrik olacak şekilde hareket etmektedir. Görsel 2'deki A, B, E ve F noktaları doğrusaldır.



Görsel 2

Buna göre

a) C ve D noktalarının birbirlerine olan uzaklığının 32 metre olduğu anda C ve D noktalarının yola dik uzaklığının kaç metre yükseklikte olacağını bulunuz.

b) Köprünün açılır kanatlarının yol ile 120° lik açı oluşturduğu anda C ve D noktaları arasındaki uzaklığın kaç metre olduğunu bulunuz.

6. Örnek

Kerem Öğretmen matematik dersinde tahtaya ABCD dörtgenini çizmiş ve bu dörtgenle ilgili aşağıdaki bilgileri vermiştir.

I. Dörtgenin en az iki simetri ekseni vardır.
II. Dörtgenin kenar uzunlukları eşit ve 5 cm'dir.
III. Simetri eksenlerinden birinin dörtgen içinde kalan parçasının uzunluğu 6 cm'dir.

Buna göre dörtgenin köşegen uzunlukları toplamının kaç cm olduğunu bulunuz.

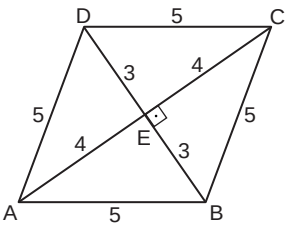
Çözüm

I. bilgiye göre bu dörtgen eşkenar dörtgen, dikdörtgen veya kare olabilir.

II. bilgiye göre kenarları eşit olduğundan bu dörtgen eşkenar dörtgen veya kare olabilir.

III. bilgiye göre karenin kenar uzunlukları 5 cm iken köşegen uzunluğu $5\sqrt{2}$ cm olmalıdır. Soruda köşegen uzunluğu 6 cm olarak verilmiş dolayısıyla bu şekil kesinlikle eşkenar dörtgendir.

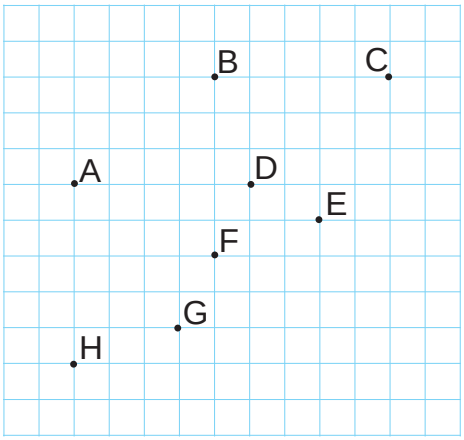
Bu bilgilerden yararlanarak aşağıdaki ABCD dörtgeni çizilebilir.



Eşkenar dörtgende köşegenler birbirini dik olarak ortaladığından $|DE| = |EB| = 3$ cm olur. AEB üçgeninde Pisagor teoreminden $|AE| = 4$ cm, $|AC| = 8$ cm olur.

Dolayısıyla ABCD eşkenar dörtgeninin köşegen uzunlukları toplamı $8 + 6 = 14$ cm bulunur.

Sıra Sizde 6



Yandaki şekilde birim karelerden oluşan zemin üzerinde işaretlenmiş sekiz nokta verilmiştir. **Köşeleri bu sekiz noktadan dört tanesi ile oluşturulabilecek dışbükey dörtgenlerle ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.**

1. **Simetri ekseni A noktasından geçen kaç farklı dörtgen oluşturulabileceğini bulunuz.**

2. **Köşelerinden ikisi A, F ve simetri ekseni AF doğrusu olan dörtgeni tanımlayarak çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.**

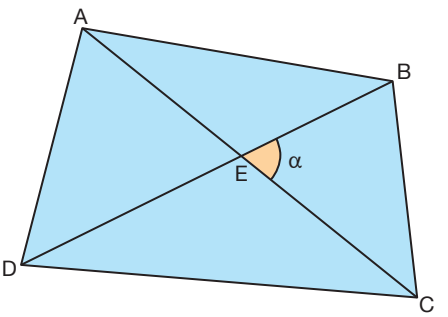
8. Uygulama

Dörtgende Alan Özellikleri-1

Aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları yanıtlayınız.

1. Köşegen uzunlukları ve köşegenler arasındaki açının ölçüsü bilinen bir dörtgenin alanının nasıl bulunabileceğine ilişkin varsayımlarınızı yazınız.

2. Aşağıdaki ABCD dörtgeninin köşegenleri arasında oluşan açının ölçüsü α olmak üzere



I. ABC üçgeninin AC kenarına ait yüksekliğini ve ADC üçgeninin AC kenarına ait yüksekliğini çiziniz.

II. ABC üçgeninde AC kenarına ait yüksekliği $\sin\alpha$ yardımıyla ifade ediniz.

III. ADC üçgeninde AC kenarına ait yüksekliği $\sin\alpha$ yardımıyla ifade ediniz.

IV. ABC üçgeninin alanını AC kenarı ve bu kenara ait yükseklik cinsinden ifade ediniz.

V. ADC üçgeninin alanını AC kenarı ve bu kenara ait yükseklik cinsinden ifade ediniz.

VI. Yukarıdaki adımları dikkate alarak ABCD dörtgeninin alanını ifade ediniz.

3. 2. maddede uyguladığınız adımlarla elde ettiğiniz eşitliklerden yararlanarak tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

$\lvert AC\rvert$	$\lvert BE\rvert$	$\lvert DE\rvert$	α	$A(\widehat{ABC})$	$A(\widehat{ADC})$	$A(ABCD)$
12 cm	4 cm	6 cm	30°	12 cm^2	18 cm^2	30 cm^2
20 cm	10 cm	8 cm	45°			
15 cm	6 cm	10 cm	90°			
13 cm	8 cm	6 cm	60°			

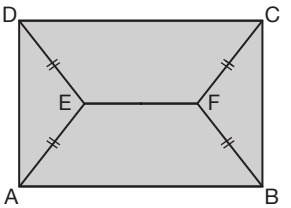
4. ABCD dörtgeninin alanı, köşegen uzunluklarının ve köşegenleri arasında oluşan açının sinüs değerinin yardımıyla ifade edilebilmektedir. Buna göre dörtgenlerde alan bağıntısına dair genellemenizi oluşturunuz.

5. ABCD dörtgeninin alanı, dörtgenin köşegen uzunlukları ve köşegenleri arasında oluşan açının sinüs değeri yardımıyla ifade edilebilmektedir. Buna göre dörtgenlerde alan bağıntısına dair genellemenizi varsayımlarınızla karşılaştırınız ve önermenizi yazınız.

6. Dörtgenlerin alan özelliklerine ilişkin yazdığınız önermeyi yeni durumlara uyarlayarak değerlendirmek için aşağıdaki soruyu cevaplayınız.
Görseldeki müstakil evin çatısının bir kısmı uygun çatı malzemeleri kullanılarak kaplanmak isteniyor. Maliyet hesabı yapılabilmesi için çatının kaplanacak kısmının alanına ihtiyaç duyulmaktadır. Müstakil evin görseli (Görsel 1) ve çatısının üstten görünümü (Görsel 2) aşağıda verilmiştir.



Görsel 1



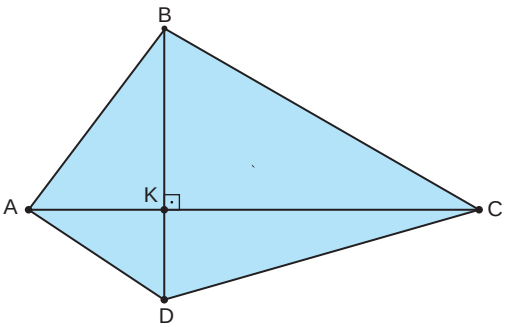
Görsel 2

Görsel 2'de ABCD dikdörtgen ve $|AE| = |BF| = |CF| = |DE|$ dir. A ile F noktaları arasındaki uzaklığın 4 metre ve $[AF]$ ile $[AB]$ arasında oluşan açının ölçüsünün $22,5^\circ$ olduğu bilinmektedir.

Buna göre uygun malzeme ile kaplanacak olan ABFE yüzeyinin alanının kaç metrekare olduğunu bulunuz.

7. Aşağıda dörtgenlerde alan özellikleri ile ilgili bir önerme verilmiştir.

Önerme: Bir ABCD dörtgeninde köşegenler dik kesişiyor ise dörtgenin alanı köşegen uzunlukları çarpımının yarısına eşittir.



Verilenler:

ABCD dörtgeninde $[AC]$ ve $[BD]$ köşegen

$[AC] \perp [BD], [AC] \cap [BD] = \{K\}, |AC|$ ve $|BD|$

İspatlanacak ifade:

$$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

Verilen bu önermeyi üçgende alan özelliklerini kullanarak ispatlayınız.

Önermede verilen ABCD dörtgeninden yararlanarak aşağıdaki işlem basamaklarını tamamlayınız.

I. AKB üçgeninin alanını dik kenarları türünden ifade ediniz.

II. BKC üçgeninin alanını dik kenarları türünden ifade ediniz.

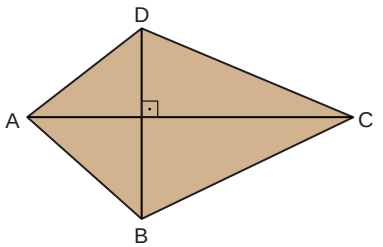
III. CKD üçgeninin alanını dik kenarları türünden ifade ediniz.

IV. DKA üçgeninin alanını dik kenarları türünden ifade ediniz.

V. I, II, III ve IV. adımlarda elde ettiğiniz üçgenlerin alanlarını toplayarak ABCD dörtgeninin alanını köşegenleri türünden ifade ediniz.

8. Elde ettiğiniz önermelerden birini 7. maddedeki ispat adımlarına benzer bir yöntem izleyerek ispatlayınız. Uyguladığınız ispatı kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

9. Elde ettiğiniz çıkarımları matematiksel modele dönüştürerek aşağıdaki gerçek yaşam durumu probleminde uygulayınız.



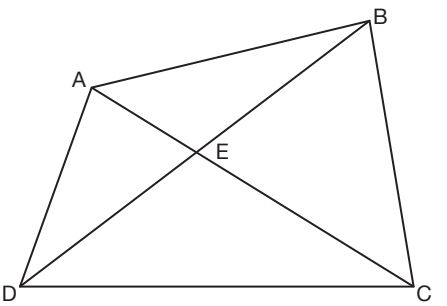
Bir çiftçi yanda verilen ABCD dörtgeni şeklindeki bahçesini köşegenleri üzerinden geçireceği çitler yardımıyla dört bölgeye ayırıp her bir bölgeye farklı ürünler ekmek istemektedir. Köşegenleri dik kesişen bu bahçenin köşegen uzunlukları birer tam sayı olup toplam alanı 63 metrekaredir. Çekilen çitlerin uzunlukları toplamı 23 metre olduğuna göre çitlerin uzunlukları farkının kaç metre olduğunu bulunuz.

9. Uygulama

Dörtgenlerde Alan Özellikleri-2

Aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları yanıtlayınız.

1. Aşağıdaki şekilde ABCD dörtgen, [AC] ve [BD] köşegenler, E noktası köşegenlerin kesim noktası ve $A(\widehat{ADE}) = S_1$, $A(\widehat{AEB}) = S_2$, $A(\widehat{BEC}) = S_3$, $A(\widehat{DEC}) = S_4$ olarak veriliyor.

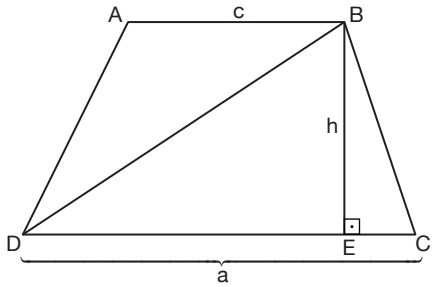


Buna göre

a) Üçgende alan özelliklerini kullanarak ADE, AEB, BEC ve DEC üçgenlerinin alanları yardımıyla $\frac{|DE|}{|EB|}$ oranını S_1, S_2, S_3 ve S_4 cinsinden yazınız.

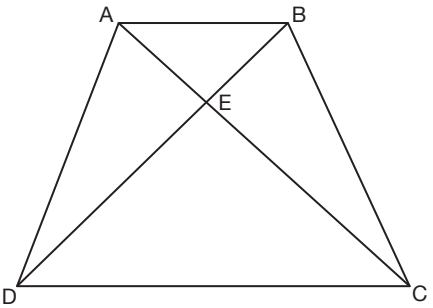
b) a maddesinden yararlanarak S_1, S_2, S_3 ve S_4 arasındaki ilişkiyi bulunuz.

2. Aşağıdaki şekilde $[AB] \parallel [DC]$, $|AB| = c$ birim, $|DC| = a$ birim, $E \in [DC]$, $[BE] \perp [DC]$, ve $|BE| = h$ birim şekilde bir ABCD dörtgeni verilmiştir.



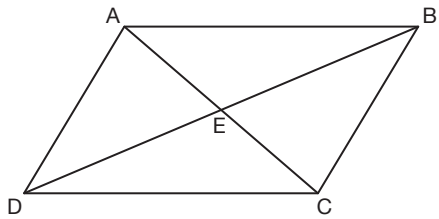
Buna göre DBC ve DBA üçgenlerinin alanları yardımıyla ABCD dörtgeninin alanını a, c ve h cinsinden ifade ediniz.

3. Aşağıdaki şekilde ABCD dörtgen, $[AB] \parallel [DC]$, $[AC]$ ve $[BD]$ köşegen, E noktası köşegenlerin kesim noktası, $A(\widehat{ADE}) = S_1$, $A(\widehat{AEB}) = S_2$, $A(\widehat{BEC}) = S_3$, $A(\widehat{DEC}) = S_4$ olarak veriliyor.

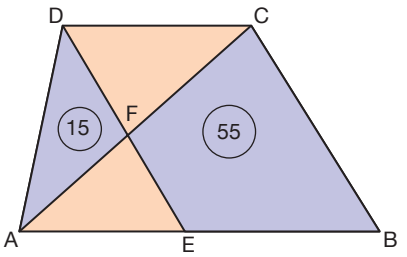


Buna göre ACD ve CBD üçgenlerinin alanlarını kullanarak $A(\widehat{ADE}) = S_1$ ve $A(\widehat{BEC}) = S_3$ arasındaki ilişkiyi bulunuz.

4. Aşağıdaki şekilde ABCD paralelkenarı verilmiştir. Buna göre paralekenarın köşegenlerinin oluşturduğu alanlar arasındaki ilişkiyi bulunuz.



7. Örnek



Yandaki şekilde ABCD yamuk ve BCDE paralelkenar, $[AC] \cap [DE] = \{F\}, E \in [AB], A(\widehat{ADF}) = 15\ cm^2$ ve $A(BCFE) = 55\ cm^2$ olarak veriliyor.

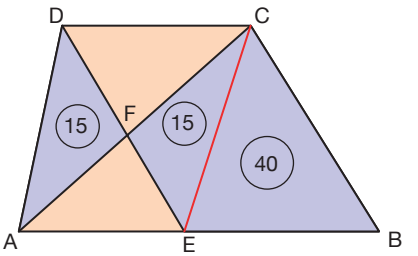
Buna göre A(ABCD) nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm

BCDE paralelkenarında CE köşegeni çizilir ve oluşan AECD dörtgeninde $[AE] \,/\!/\, [DC]$ olduğunda $A(\widehat{ADF}) = A(\widehat{ECF}) = 15\ cm^2$ olur.

Bu durumda $A(\widehat{EBC}) = 55 - 15 = 40\ cm^2$ ve

$A(\widehat{DFC}) = 40 - 15 = 25\ cm^2$ olur.



AECD dörtgeninde köşegenlerin oluşturduğu dört üçgenden karşılıklı olanların alanları çarpımı eşit olacağından

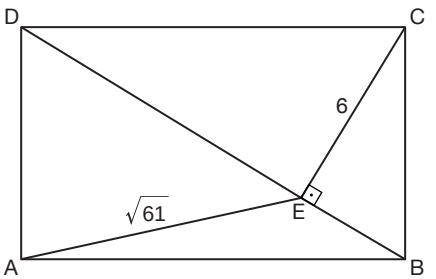
$$A(\widehat{AEF}) \cdot A(\widehat{CDF}) = A(\widehat{ADF}) \cdot A(\widehat{ECF})$$

$$25 \cdot A(\widehat{AEF}) = 15 \cdot 15$$

$$A(\widehat{AEF}) = 9\ cm^2 \text{ olur.}$$

Bu durumda $A(ABCD) = 104\ cm^2$ olarak bulunur.

Sıra Sizde 7

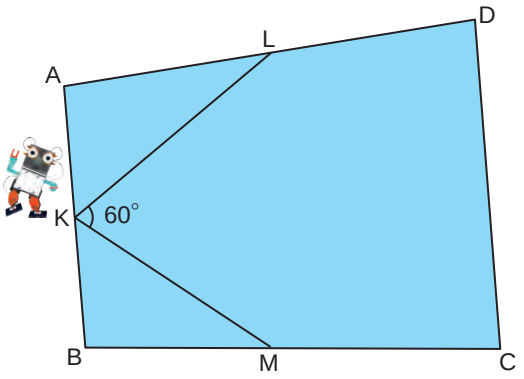


Yandaki şekilde ABCD dikdörtgendir.

$[BD]$ köşegen, $[BD] \perp [CE], E \in [BD], |CE| = 6$ cm ve $|AE| = \sqrt{61}$ cm olarak veriliyor.

Buna göre $A(\widehat{ADE})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

8. Örnek



Robotik kodlama eğitimi alan Bilge, yanda dörtgen biçiminde görseli verilen parkurun alanını hesaplamak istemiştir. Bilge yaptığı robot yardımıyla AB kenarının orta noktası olan K nın, AD kenarının orta noktası olan L ye uzaklığını 8 metre, BC kenarının orta noktası olan M ye uzaklığını ise 10 metre olarak hesaplamıştır. Robotun izlediği iki rota arasında oluşan açının ölçüsünün 60° olduğu biliniyor.

Buna göre parkurun alanının kaç metrekare olduğunu bulunuz.

Çözüm

AC ve BD köşegenleri çizildiğinde ABD üçgeninde K ve L orta noktalar olduğundan $[KL] \,//\, [BD]$ olur.

$|KL| = \frac{|BD|}{2} \Rightarrow 8 = \frac{|BD|}{2} \Rightarrow |BD| = 16$ cm

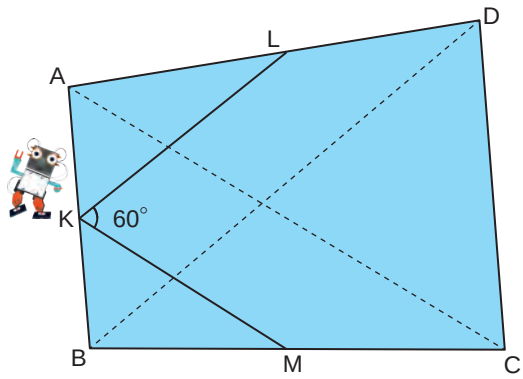
ABC üçgeninde K ve M orta noktalar olduğundan $[KM] \,//\, [AC]$ olur.

$|KM| = \frac{|AC|}{2} \Rightarrow 10 = \frac{|AC|}{2} \Rightarrow |AC| = 20$ cm

Ayrıca yöndeş açılardan $m(\widehat{LKM}) = m(\widehat{DTC}) = 60°$ olur.

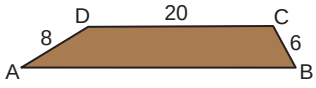
$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin 60°$

$= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 80\sqrt{3}$ cm^2 olarak bulunur.



Sıra Sizde 8

Şekil 1'de verilen ABCD yamuğu biçimindeki özdeş çıtalardan dört tanesi aralarında boşluk bırakılmadan birleştirilerek Şekil 2'deki gibi resim çerçevesi yapılmıştır.
$|AD| = 8$ cm, $|DC| = 20$ cm ve $|CB| = 6$ cm olarak verilmiştir.



Şekil 1



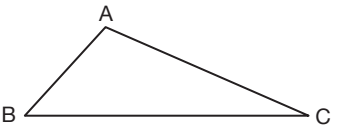
Şekil 2

Buna göre resim yerleştirmek için ayrılan bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

10. Uygulama

Deltoid

Aşağıda ABC üçgeni için verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.



1. $m(\widehat{A}) > 90^\circ$ olmak üzere ABC üçgeninin BC kenarına göre simetriğini alınız. A noktasının BC kenarına göre simetriği olan noktayı A′ noktası olarak isimlendiriniz. Oluşan ABA′C dörtgeni ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) ABA′C dörtgeninin her zaman bir dışbükey dörtgen olup olmayacağını açıklayınız.

b) ABA′C dörtgeninde A ve A′ açılarının her zaman eş olup olmayacağını açıklayarak B ve C açılarının ölçüleri hakkında neler söylenebileceği üzerine tartışınız.

c) ABA′C dörtgeninde eşit uzunluğa sahip kenarları açıklayınız.

ç) ABA′C dörtgeninin köşegenlerinin her zaman dik kesişip kesişmeyeceğini açıklayınız.

d) ABA′C dörtgeninin köşegen uzunluklarının bilindiği kabul edilirse ABA′C dörtgeninin alanının nasıl bulunabileceğini açıklayınız.

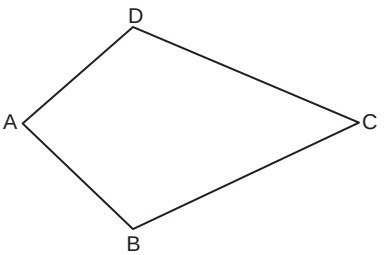
e) ABA′C dörtgeni bir deltoid olduğuna göre deltoidin nasıl tanımlanabileceğine ilişkin fikirlerinizi paylaşınız. Sınıf arkadaşlarınızla fikirleriniz üzerine tartışınız.

2. $m(\widehat{A}) > 90^\circ$ olmak üzere ABC üçgeninin sırasıyla AB ve CA kenarlarına göre simetriği alındığında oluşacak dörtgenlerin dışbükey dörtgen olup olmayacağını açıklayınız. Cevabınızdan yola çıkarak oluşabilecek dörtgenlerin deltoid olup olmayacağını açıklayınız.

3. ABC üçgeninin dar açılı bir üçgen olması durumunda herhangi bir kenarına göre simetriği alındığında oluşacak dörtgenlerin deltoid olup olmayacağını açıklayınız.

4. ABC üçgeninin ikizkenar veya eşkenar üçgen olması durumunda ABC üçgeninin kenarlarına göre simetriği alındığında oluşabilecek dörtgenler üzerine fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

9. Örnek



Yandaki ABCD dörtgeninde $|AB| = |AD|$, $|BC| = |DC|$, $m(\widehat{D}) = 110^\circ$ ve $m(\widehat{A}) = 2 \cdot m(\widehat{C}) + 20^\circ$ olarak veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{A})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

ABCD dörtgeninde $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = 110^\circ$ dir. Bir dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 360° olduğundan

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$

$2 \cdot m(\widehat{C}) + 20^\circ + 110^\circ + m(\widehat{C}) + 110^\circ = 360^\circ$

$3 \cdot m(\widehat{C}) + 240^\circ = 360^\circ$

$3 \cdot m(\widehat{C}) = 120^\circ$

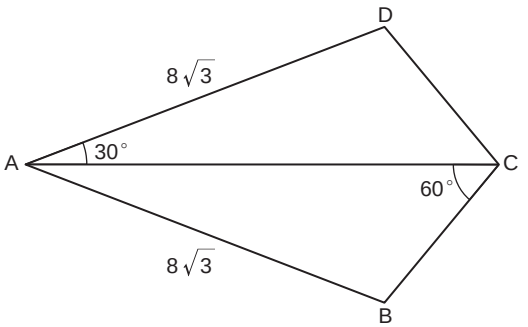
$m(\widehat{C}) = 40^\circ$ olur.

$m(\widehat{A}) = 2 \cdot 40^\circ + 20^\circ = 100^\circ$ olarak bulunur.

Sıra Sizde 9

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1.

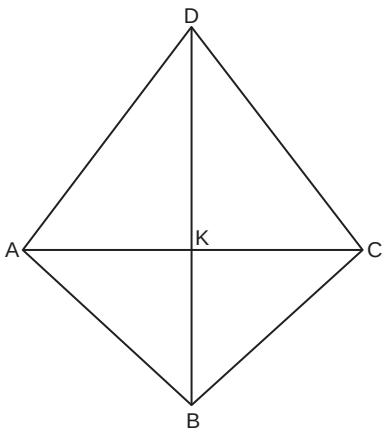


Yandaki ABCD deltoidinde

$|AD| = |AB| = 8\sqrt{3}$ birim, $m(\widehat{DAC}) = 30^\circ$ ve $m(\widehat{ACB}) = 60^\circ$ olarak veriliyor.

Buna göre A(ABCD) nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

2.



Yandaki ABCD deltoidinde

$|AD| = |DC| = 20$ cm, $|AB| = |BC| = 15$ cm ve $|AC| = 24$ cm olarak veriliyor.

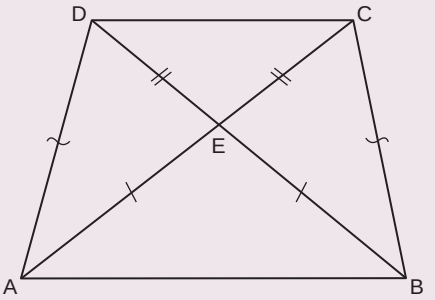
Buna göre $|DB|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

Ek soruların yer aldığı 3. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Dörtgende alan)

Özel dörtgenlerin kenar, açı, köşegen, simetri ve alan özelliklerini içeren Çalışma Kağıdı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Kontrol Noktası

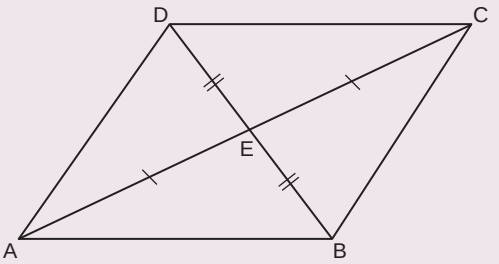
1.



İkizkenar Yamuk

- $[AB] \parallel [DC]$ ve $|AD| = |BC|$
- $|AE| = |EB|$ ve $|DE| = |EC|$
- $|AC| = |BD|$

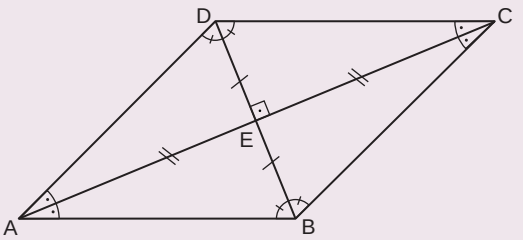
2.



Paralelkenar

- $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$ ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$
- $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$
- $|AE| = |EC|, |BE| = |ED|$

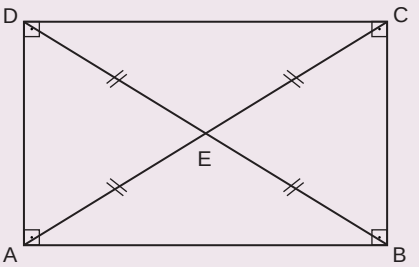
3.



Eşkenar Dörtgen

- $[AC] \perp [BD]$
- $|AE| = |EC|$ ve $|BE| = |ED|$
- $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{DCA})$, $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{CDB})$
- Köşegenler simetri eksenidir.

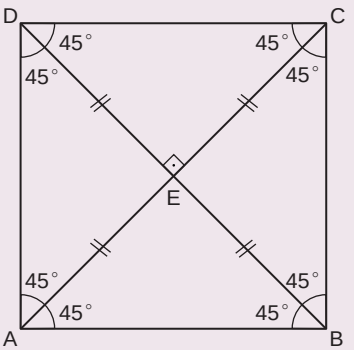
4.



Dikdörtgen

- $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90°$
- $|AC| = |BD|$
- $|AE| = |EC| = |BE| = |ED|$

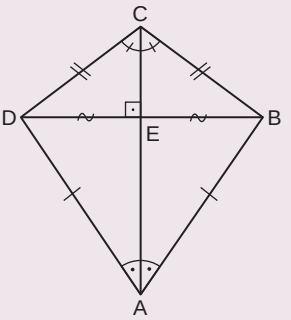
5.



Kare

- $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90°$
- $|AC| = |BD|$
- $|AE| = |EC| = |BE| = |ED|$
- $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBD}) = 45°$
  $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{CDB}) = m(\widehat{ADB}) = 45°$
- Köşegenler simetri eksenidir.

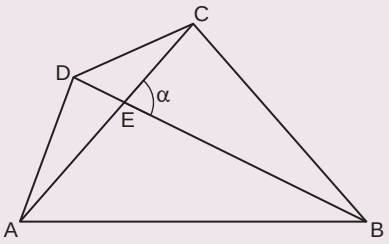
6.



Deltoid

- $m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{BCA}), m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BAC})$
- $|CD| = |CB|, |AD| = |AB|$ ve $|DE| = |EB|$
- $[AC] \perp [BD]$
- AC köşegeni simetri eksenidir.

7.

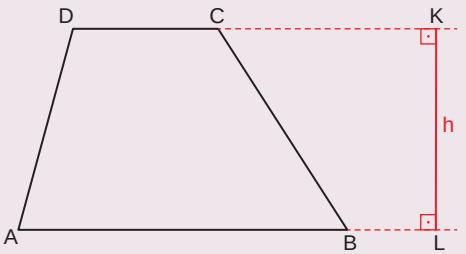


Dörtgenin Alanı

$[AC]$ ve $[BD]$ köşegenler,

- $m(\widehat{CEB}) = \alpha$ olmak üzere
- $A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\alpha$
- $A(\widehat{AED}) \cdot A(\widehat{BEC}) = A(\widehat{AEB}) \cdot A(\widehat{DEC})$

8.

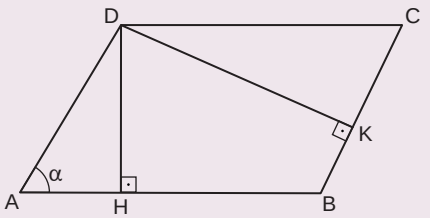


Yamuğun Alanı

$[AB] \mathbin{/\!/} [DC], [KL] \perp [AB]$ ve $|KL| = h$ birim olmak üzere

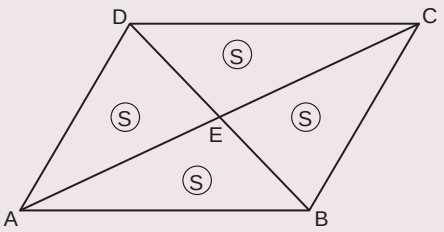
- $A(ABCD) = \frac{(|AB| + |CD|)}{2} \cdot h$

9.



Paralelkenarın Alanı

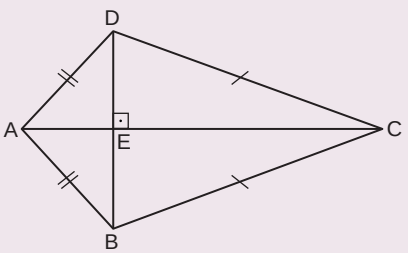
- A, H ve B noktaları ile B, K ve C noktaları doğrusaldır. $[DH] \perp [AB], [DK] \perp [BC]$
- $m(\widehat{DAB}) = \alpha$ olmak üzere
- $A(ABCD) = |AB| \cdot |AD| \cdot \sin\alpha$
- $A(ABCD) = |AB| \cdot |DH| = |BC| \cdot |DK|$



$[AC]$ ve $[BD]$ köşegenler,

- $A(\widehat{AEB}) = A(\widehat{BEC}) = A(\widehat{CED}) = A(\widehat{DEA}) = S$

10.

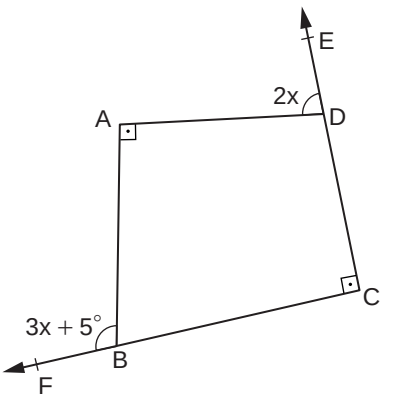


Deltoidin Alanı

- $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenler, $[AC] \perp [DB]$ ve $|AB| = |AD|, |BC| = |CD|$
- $A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$

Alıştırmalar

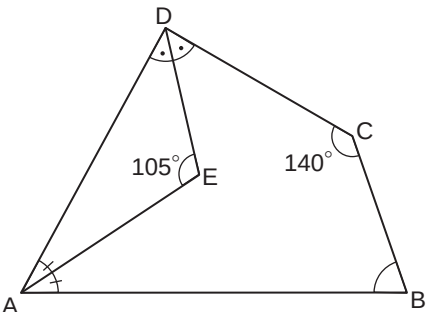
1.



Yandaki ABCD dörtgeninde $[DA] \perp [AB]$, $[DC] \perp [CB]$, E, D, C ve F, B, C noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{ADE}) = 2x$ ve $m(\widehat{ABF}) = 3x + 5^\circ$ olarak veriliyor.

Buna göre x in kaç derece olduğunu bulunuz.

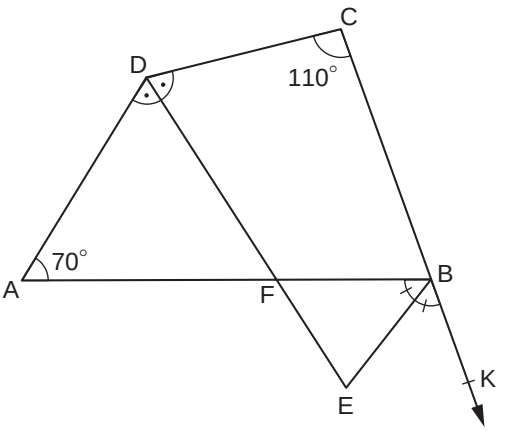
2.



Yandaki ABCD dörtgeninde [AE] ve [DE] iç açıortaylar, $m(\widehat{C}) = 140^\circ$ ve $m(\widehat{DEA}) = 105^\circ$ olarak veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{ABC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

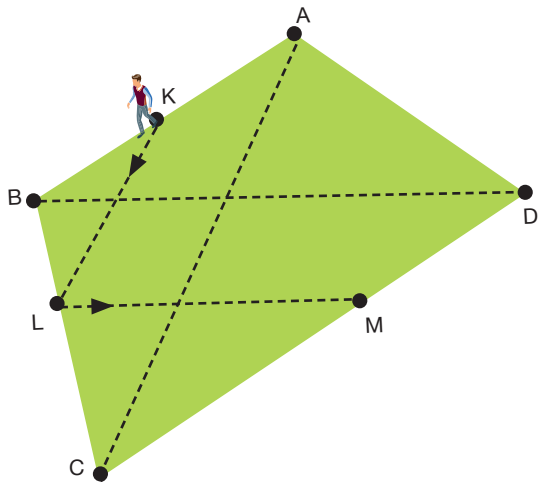
3.



Yandaki şekilde ABCD bir dörtgen; D, F, E ve C, B, K noktaları doğrusaldır. $[AB] \cap [DE] = \{F\}$, [BE] dış açıortay, [DE] iç açıortay, $m(\widehat{A}) = 70^\circ$, $m(\widehat{C}) = 110^\circ$ olarak veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{DEB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

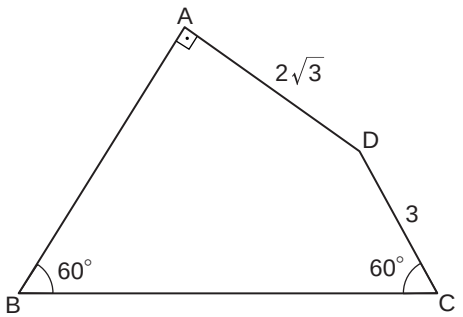
4.



Yan tarafta dörtgen biçiminde bir yeşil alan görseli verilmiştir. A, B, C ve D yeşil alanın köşe noktaları; K, L ve M bulundukları kenarların orta noktaları olmak üzere K noktasında bulunan kişinin doğrusal olarak hareket ederek önce L noktasına daha sonra M noktasına giderken aldığı toplam yol 28 metre olarak veriliyor.

Buna göre yeşil alanın köşegen uzunlukları toplamının kaç metre olduğunu bulunuz.

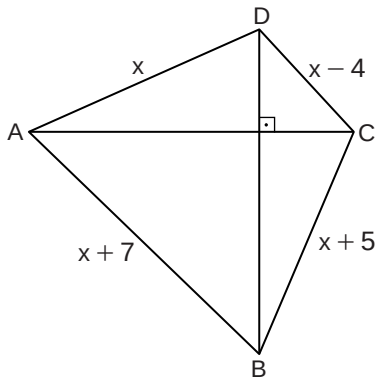
5.



Yandaki ABCD dörtgeninde $m(\widehat{ABC}) = 60°$, $m(\widehat{BCD}) = 60°$, $[BA] \perp [AD]$, $|AD| = 2\sqrt{3}$ cm, $|DC| = 3$ cm olarak veriliyor.

Buna göre $|BC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

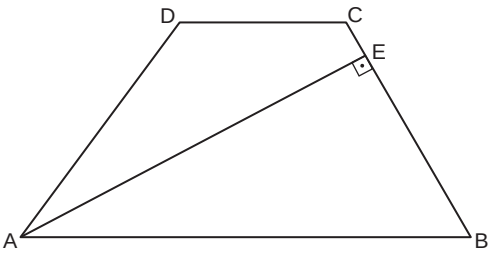
6.



Yandaki ABCD dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$, $|AD| = x$ birim $|AB| = (x + 7)$ birim, $|BC| = (x + 5)$ birim ve $|CD| = (x - 4)$ birim olarak veriliyor.

Buna göre $|AD| = x$ in kaç birim olduğunu bulunuz.

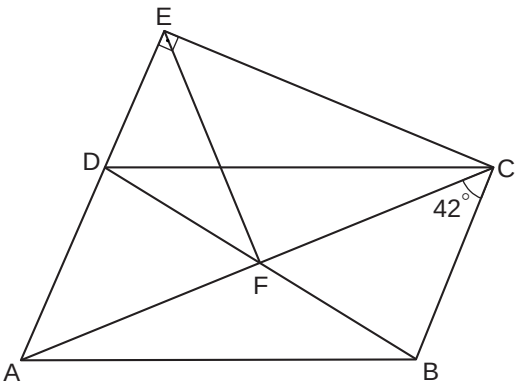
7.



Yandaki ABCD ikizkenar yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$, $[AE] \perp [BC]$, $|DA| = |CB|$ ve $\dfrac{m(\widehat{DAE})}{m(\widehat{EAB})} = \dfrac{4}{7}$ olarak veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{DCB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

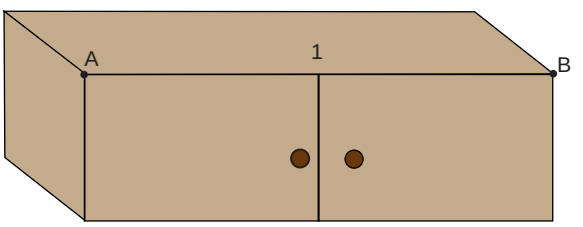
8.



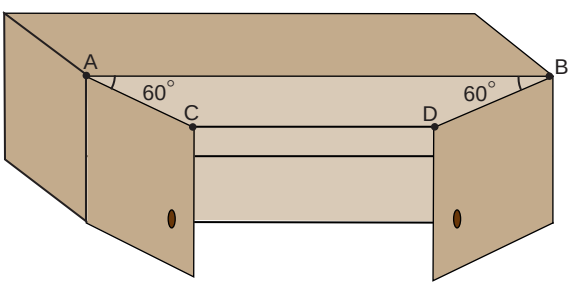
Yandaki şekilde ABCD bir paralelkenar; A, D ve E noktaları doğrusal, $[AE] \perp [EC]$, $[AC]$ ve $[BD]$ köşegen, F noktası köşegenlerin kesim noktasıdır. $m(\widehat{ACB}) = 42^\circ$ olarak veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{EFC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

9. Şekil 1'de verilen dikdörtgen biçimindeki dolabın A ve B köşeleri arasındaki uzaklık 1 metredir. Dolabın eş dikdörtgenlerden oluşan her iki kapağının 60° açılmasıyla oluşan görüntüsü Şekil 2'de verilmiştir.



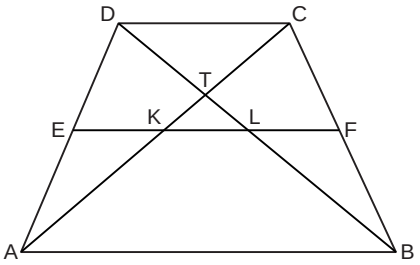
Şekil 1



Şekil 2

Buna göre Şekil 2'de kapakları açılan dolabın kapaklarının üst köşeleri olan C ve D noktaları arasındaki uzaklığın kaç santimetre olduğunu bulunuz.

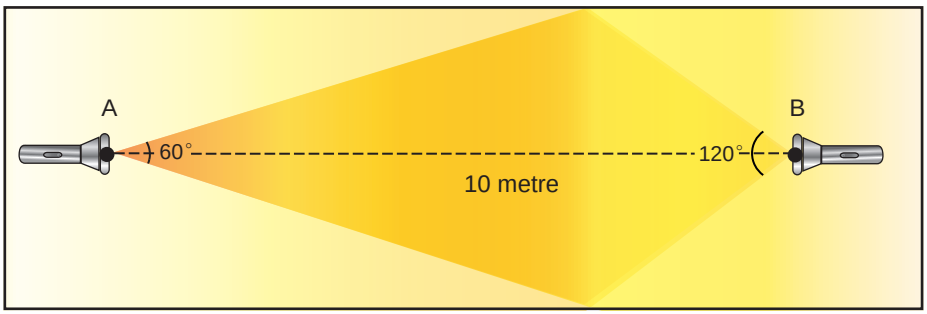
10.



Yandaki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$, E ve F bulundukları kenarların orta noktaları, $[AC]$ ve $[BD]$ yamuğun köşegenleri, $[AC] \cap [EF] = \{K\}$, $[BD] \cap [EF] = \{L\}$, $[AC] \cap [BD] = \{T\}$, $|AB| = 16$ cm ve $|DC| = 6$ cm olarak veriliyor.

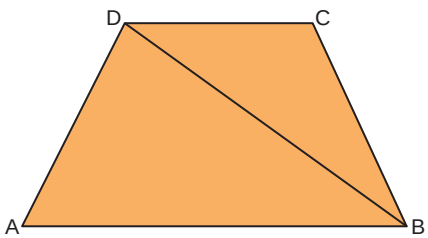
Buna göre $|KL|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

11. Aralarında 10 metre mesafe bulunan A ve B noktalarındaki iki fener doğrusal olacak şekilde önlerindeki bölgeyi aşağıda verilen görseldeki gibi aydınlatmaktadır. A noktasındaki fenerin merceği 60°lik açı, B noktasındaki fenerin merceği 120° lik açı ile önlerindeki bölgeyi aydınlatmaktadır.

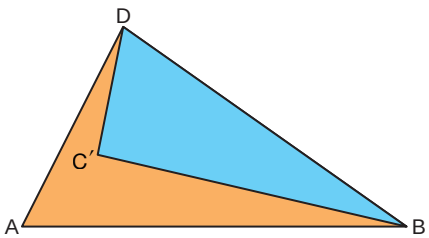


Buna göre fenerlerin aydınlattığı ortak bölgenin alanının kaç metrekare olduğunu bulunuz.

12. Şekil 1'de ön yüzü turuncu, arka yüzü mavi renkli ABCD yamuğu biçimindeki kâğıt; $[BD]$ boyunca katlandığında C noktası C′ noktasıyla çakışarak Şekil 2 elde edilmektedir. $2 \cdot |AB| = 5 \cdot |DC|$ ve Şekil 2'de turuncu renkli bölgenin alanı 24 cm^2 olarak veriliyor.



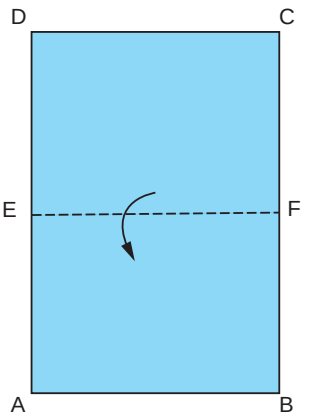
Şekil 1



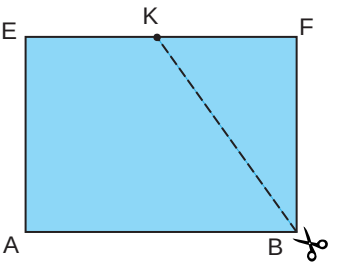
Şekil 2

Buna göre A(ABCD) nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

13. Dikdörtgen şeklindeki bir kâğıdın köşe noktaları A, B, C ve D olmak üzere (Şekil 1) [DC], [AB] nın üzerine gelecek şekilde [EF] boyunca katlandığında Şekil 2'deki görüntü elde ediliyor. K ∈ [EF] olmak üzere Şekil 2'deki kâğıt, [BK] ve [KE] boyunca makas yardımıyla kesilerek üç parçaya ayrılıyor.



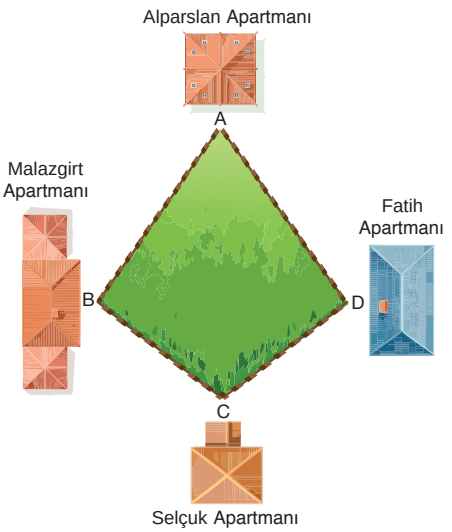
Şekil 1



Şekil 2

Katlı parçalar açıldığında elde edilen yamuklardan birinin alanı, üçgenin alanının iki katı olduğuna göre $\frac{|EK|}{|KF|}$ oranını bulunuz.

14.



Yanda verilen dörtgen biçimindeki bölgenin A, B, C ve D köşelerinde sırasıyla Alparslan Apartmanı, Malazgirt Apartmanı, Selçuk Apartmanı ve Fatih Apartmanı bulunmaktadır. $|AB| = |AD| = 51$ metre, $|CB| = |CD| = 30$ metre ve $|BD| = 48$ metredir. ABCD dörtgeni biçimindeki bölgeyi yeşillendirmek isteyen bina sakinleri bu bölgenin etrafını çitle çevirmek istemektedir.

Buna göre

a) Parkın alanının kaç metrekare olduğunu bulunuz.

b) Park alanının çimlendirilmesi için metrekare başına 120 TL ödeneceğine göre bu iş için toplam kaç TL ödeneceğini bulunuz.

c) Parkın etrafının çitle çevrilmesi için metre başına 80 TL ödeneceğine ve dört bina, maliyeti eşit olarak bölüşeceğine göre bir binanın ödeyeceği ücreti bulunuz.

2.2. ÖZEL DÖRTGENLER ARASINDAKİ İLİŞKİLER

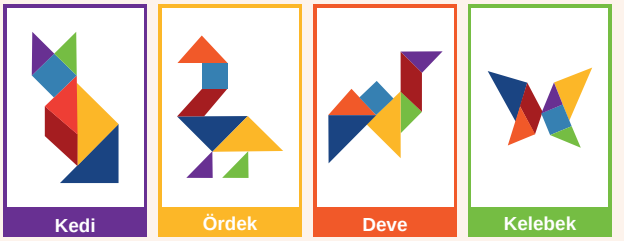
Konuya Başlarken

Kâğıt, plastik, tahta vb. malzemelerin herhangi birinden üretilebilen; 7 farklı geometrik parçanın bir araya getirilmesi ve çeşitli figürler oluşturulması esasına dayanan zekâ oyununa **tangram** denir (Görsel 2.2).



Görsel 2.2: *Tangram*

Parçalar kullanılarak geometrik bir şekil, insan figürü, hayvan figürü, bir harf vb. elde edilmektedir. Figür ve şekillerin oluşturulmasında parçaların hepsi veya bir kısmı kullanılabilmektedir. Görsel 2.3'te tangram parçalarıyla oluşturulmuş bazı figürler yer almaktadır.



Görsel 2.3: *Tangram Parçalarıyla Oluşturulmuş Hayvan Figürleri*

Buna göre aşağıdaki sorularla ilgili fikirlerinizi öğretmeninizin rehberliğinde sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. **Görsel 2.2'de hangi geometrik şekiller kullanılmıştır?**

2. **Görsel 2.2'deki geometrik şekillerin bir araya getirilmesiyle hangi özel dörtgenler oluşturulabilir?**

3. **Özel dörtgenler açı, kenar, köşegen ve simetri özellikleri dikkate alınarak benzer özelliklerine göre nasıl sınıflandırılabilir?**

Kare, dikdörtgen, eşkenar dörtgen, paralelkenar ve yamuk gibi özel dörtgenler; kenar uzunlukları, iç açı ölçüleri, köşegenlerinin durumları ve simetri özellikleri bakımından birbirinden ayrılırlar. Bu özellikler incelendiğinde dörtgenler arasındaki benzerlik ve farklılıklar ortaya çıkar. Örneğin kare, hem dikdörtgenin hem de eşkenar dörtgenin özelliklerini taşımaktadır. Bu tür karşılaştırmalar ve ilişkiler, dörtgenlerin sınıflandırılmasını ve daha iyi anlaşılmasını sağlamakla birlikte geometrik düşünme becerilerini de geliştirmektedir.

11. Uygulama

Özel Dörtgenler Arasındaki İlişkiler

Öğretmeninizin rehberliğinde uygulama basamaklarını tamamlayınız.

1. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve simetri özelliklerine ilişkin bilgilerinizi kullanarak özel dörtgenler arasındaki ilişkilere dair fikirleriniz üzerine sınıf arkadaşlarınızla saygı ve nezaket kuralları çerçevesinde tartışarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Karşılıklı açılarının ölçüleri eşit olan özel dörtgenler hangileridir?

b) Bütün açılarının ölçüleri eşit olan özel dörtgenler hangileridir?

c) İki kenarı paralel olan özel dörtgenler hangileridir?

ç) Karşılıklı kenarları paralel olan özel dörtgenler hangileridir?

d) Karşılıklı kenar uzunlukları eşit olan özel dörtgenler hangileridir?

e) Kenar uzunlukları eşit olan özel dörtgenler hangileridir?

f) Köşegenleri birbirini ortalayan özel dörtgenler hangileridir?

g) Köşegenleri birbirine dik olan özel dörtgenler hangileridir?

ğ) Köşegen uzunlukları eşit olan özel dörtgenler hangileridir?

h) Köşegenlerinden en az biri simetri ekseni olan özel dörtgenler hangileridir?

ı) Simetri ekseni olmayan özel dörtgenler hangileridir?

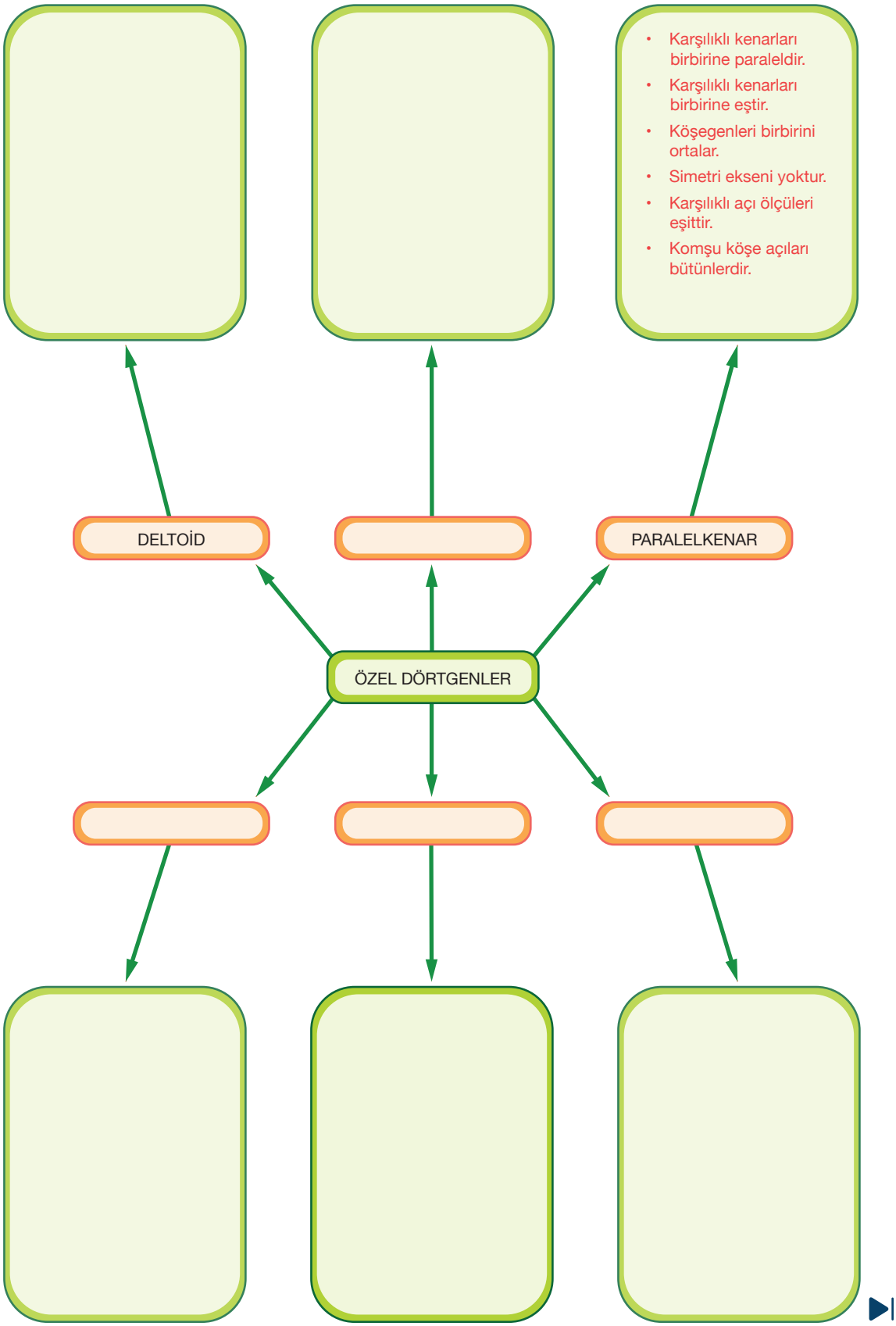
i) Yalnız bir köşegeni açıortay olan özel dörtgenler hangileridir?

j) İki köşegeni de açıortay olan özel dörtgenler hangileridir?

k) Köşegenleri dik kesişen ancak birbirini ortalamayan özel dörtgen hangisidir?

l) Deltoid ile diğer özel dörtgenler arasındaki benzerlikler ve farklılıklar nelerdir?

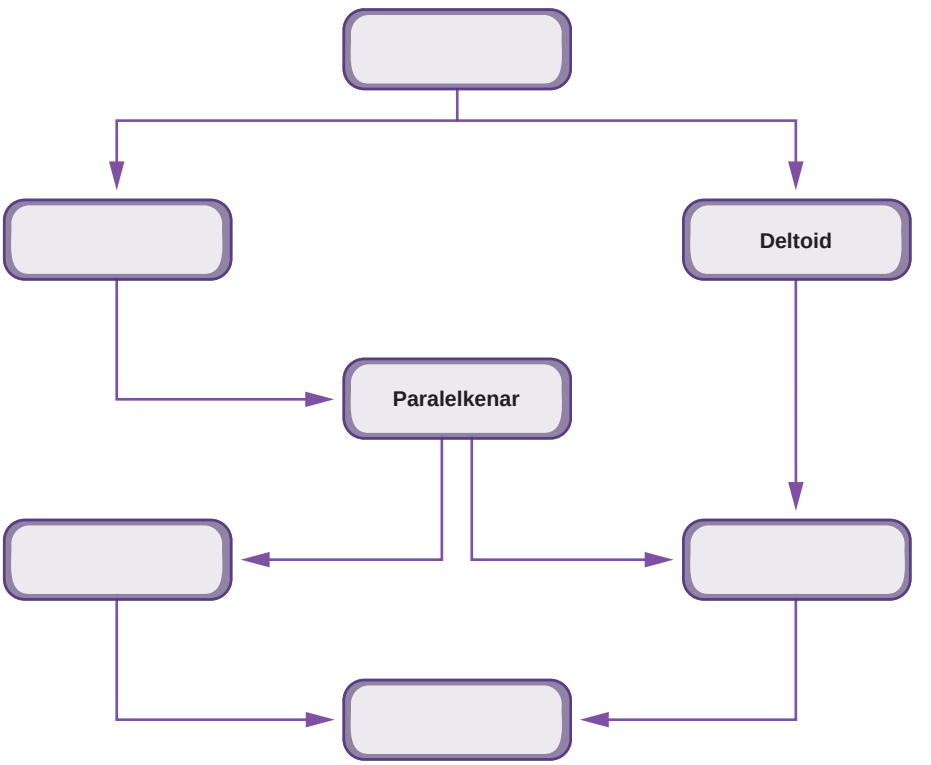
2. Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve simetri özelliklerine ilişkin bilgilerinizi kullanarak aşağıdaki kavram haritasında boş bırakılan yerleri örnekteki gibi doldurunuz.



3. Sınıf arkadaşlarınızla ulaştığınız sonuçlardan yola çıkarak özel dörtgenler arasında elde ettiğiniz ilişkileri örneklerdeki gibi yazınız.

- Eşkenar dörtgen, karşılıklı açılarının ölçüleri birbirine eşit olan bir deltoiddir.
- Eşkenar dörtgen, tüm kenar uzunlukları birbirine eşit olan bir paralelkenardır.

4. **a)** Aşağıda özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen, simetri özelliklerine göre genelden özele olacak şekilde oluşturulmuş şema verilmiştir. Şemada boş bırakılan yerleri örnekteki gibi doldurunuz.



b) Siz de dijital ortamda kendi tasarımınızı oluşturarak sınıfta arkadaşlarınızla paylaşınız.

c) Dörtgenleri sınıflandırırken hiyerarşik yapıya uygun olmayan dörtgenlerin olup olmadığı üzerine sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

10. Örnek

Aşağıda dörtgenlere ait bazı özellikler verilmiştir.

I. Her kare aynı zamanda bir deltoiddir.

II. Kare, dörtgenlerin en genel hâlidir.

III. Her eşkenar dörtgen aynı zamanda bir yamuktur.

IV. Eşkenar dörtgenin tüm açı ölçüleri birbirinden farklıdır.

V. Yamuğun iki kenar uzunluğu birbirine eşit olabilir.

VI. Bir dikdörtgenin köşegenleri her zaman açıortaydır.

Bu ifadelerden hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

Çözüm

I, III ve V. doğrudur.

Sıra Sizde 10

Aşağıda verilen ifadeleri yanlarında bulunan numaralandırılmış özel dörtgenlerden uygun olanlar ile eşleştiriniz.

İfadeler	Özel Dörtgenler
a) Karşılıklı kenarları birbirine paralel olan dörtgen	**I.** Paralelkenar
b) Köşegenleri birbirini dik ortalayan dörtgen	**II.** Deltoid
c) Kenar uzunlukları birbirine eşit olan fakat köşegen uzunlukları birbirine eşit olmayan dörtgen	**III.** Kare
ç) Karşılıklı kenar uzunlukları eşit ve köşegenleri birbirini ortalayan dörtgen	**IV.** Yamuk
d) Dikdörtgenin kenar özelliklerini taşıyan ancak iç açı ölçüleri 90° olmayan dörtgen	**V.** Eşkenar dörtgen
	VI. Dikdörtgen

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

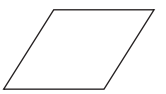
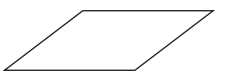
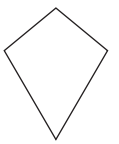
Alıştırmalar

1. Aşağıdaki tabloda verilen özel dörtgenlerle ilgili soruları cevaplayınız.

Yamuk	Deltoid	Paralelkenar	İkizkenar yamuk
Dikdörtgen	Eşkenar dörtgen	Kare	Dik yamuk

a) Karşılıklı kenarları paralel olan özel dörtgenleri bulunuz.
b) Tüm açı ölçüleri eşit olan özel dörtgenleri bulunuz.
c) Karşılıklı açı ölçüleri eşit olan özel dörtgenleri bulunuz.
ç) Tüm kenar uzunlukları eşit olan özel dörtgenleri bulunuz.
d) Karşılıklı kenar uzunlukları eşit olan özel dörtgenleri bulunuz.
e) Köşegen uzunlukları eşit olan özel dörtgenleri bulunuz.
f) Köşegenlerinden en az biri açıortay olan özel dörtgenleri bulunuz.
g) Köşegenlerinden en az biri simetri ekseni olan özel dörtgenleri bulunuz.

2. Ali, Burhan, Can ve Deniz kendi aralarında bir oyun oynayacaktır. Özel dörtgenlerle ilgili soruların olduğu kartlar bir torbaya konulacaktır. Oyuncuların her biri bir kart seçecek ve sorulara verecekleri cevaplara göre puan alacaklardır. Ali ve Deniz 1. grup, Burhan ve Can 2. grup olarak belirlenmiştir.
Ali, yamuk özelliklerini sağlayan geometrik şekillerin isimlerini yazacaktır.
Burhan, paralelkenar özelliklerini sağlayan geometrik şekillerin isimlerini yazacaktır.
Can, deltoid özelliklerini sağlayan geometrik şekillerin isimlerini yazacaktır.
Deniz, eşkenar dörtgen ve dikdörtgenin özelliklerini birlikte sağlayan geometrik şekillerin isimlerini yazacaktır.

	Kare 5 puan
	Dikdörtgen 4 puan
	Eşkenar dörtgen 3 puan
	Paralelkenar 2 puan
	Deltoid 1 puan

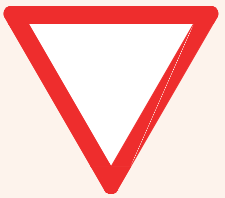
Yazılacak her dörtgen için alınacak puanlar yukarıda verilmiştir.
Oyuncular, kendi şartlarını sağlayan tüm olası geometrik şekilleri eksiksiz bir şekilde listelediklerine göre, grupların aldığı toplam puanları hesaplayınız

Ek soruların yer aldığı 4. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Dörtgenlerde kenar, köşegen, simetri ve alan)

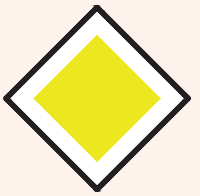
2.3. ÇOKGENLERİN SINIFLANDIRILMASI

Konuya Başlarken

Trafik işaret ve levhaları genel anlamda hayati bir öneme sahiptir. Trafikte hem insanların hem de araçların nasıl bir uyum ve düzen içerisinde olmaları; nerede, nasıl hareket etmeleri gerektiğini trafik işaret ve levhaları belirler.
Aşağıdaki görsellerde bazı trafik levhaları verilmiştir.



Yol Ver



Ana yol



Dur



İleri Mecburi Yön

(Genel ağdan alınmıştır.)

Buna göre aşağıdaki sorularla ilgili fikirlerinizi öğretmeninizin rehberliğinde sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. **Yukarıdaki levhalarda kullanılan çokgenlerde kenar sayılarına göre hangi geometrik şekiller kullanılmıştır?**

2. **Verilen geometrik şekillerden hangisi diğerlerinden farklı bir özelliğe sahiptir?**

3. **Yukarıdaki levhalarda kullanılan geometrik şekillerin iç açı ölçüleri ve varsa köşegenleri incelenerek bir gruplandırma yapılabilir mi?**

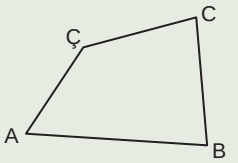
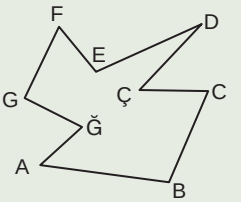
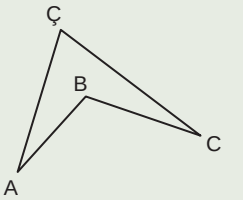
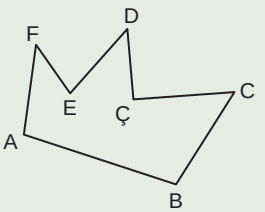
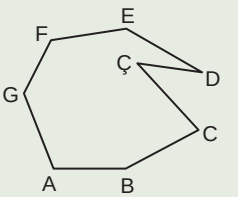
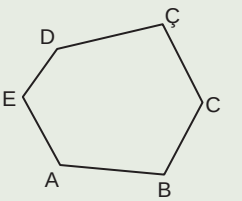
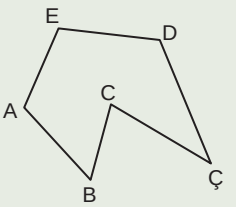
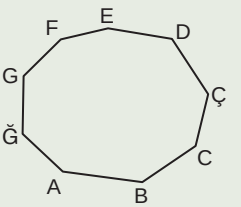
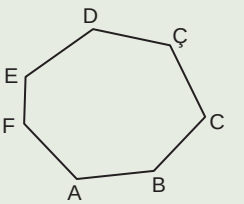
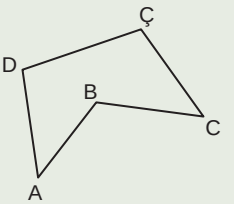
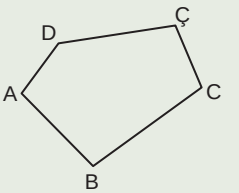
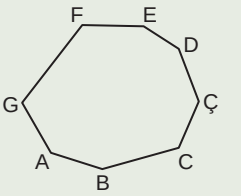
Çokgenler, üç ya da daha fazla doğru parçasının doğrusal olmayacak bir şekilde uç uca eklenmesiyle oluşan ve yalnızca bir bölgeyi çevreleyen iki boyutlu kapalı geometrik şekillerdir. Günlük hayatta sıkça gördüğümüz trafik levhalarında, evlerimizdeki halı ve kilimlerde kullanılan desenlerde, inşaat sektöründe, mimaride ve sanatın birçok dalında çokgenleri görmek mümkündür.

12. Uygulama

Çokgenlerin Sınıflandırılması

Aşağıda istenenleri gerçekleştirerek soruları yanıtlayınız.

1. Aşağıdaki tabloda verilen çokgenleri inceleyiniz. Öğretmeninizin rehberliğinde oluşturulan 4–6 kişilik gruplarda, öz güven ve sorumluluk bilinciyle üzerinize düşen görevleri yerine getiriniz ve aşağıdaki adımları uygulayınız.

 **1**	 **2**	 **3**
 **4**	 **5**	 **6**
 **7**	 **8**	 **9**
 **10**	 **11**	 **12**

a) Verilen çokgenleri karşılaştırınız. Görünümleri üzerine düşünerek farklı olduğunu düşündüğünüz çokgenleri gruplandırınız.

b) Her gruptan bir temsilci belirleyerek çokgenlerle ilgili yaptığınız gruplandırmayı diğer gruplarla paylaşınız.

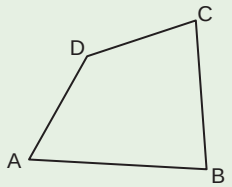
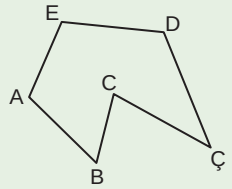
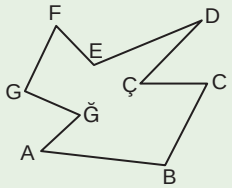
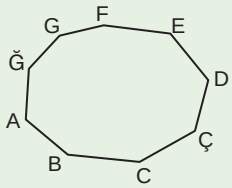
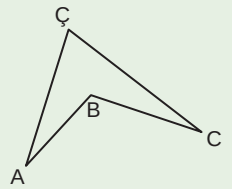
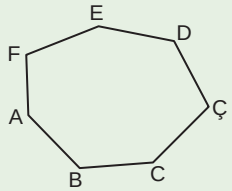
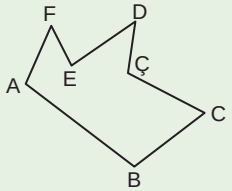
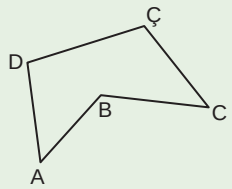
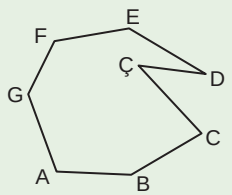
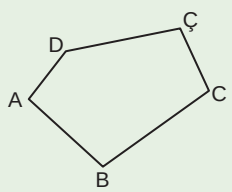
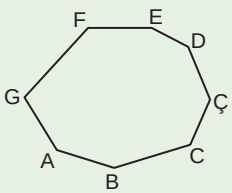
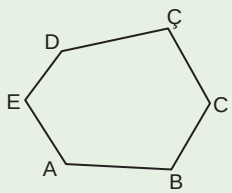
c) Çokgenlerin sınıflandırılmalarını sağlayacak ölçütleri belirleyerek sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

ç) 2, 3, 4, 5, 7 ve 10 numaralı şekillerin diğer şekillerden farklı görünme sebebinin, çokgenlerin iç açı ölçüleriyle ilişkili olup olmadığı üzerine sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

d) Belirlediğiniz bir şeklin iç bölgesinden herhangi iki nokta seçiniz. Bu iki noktanın birleştirilmesiyle oluşan doğru parçasının tamamı, her zaman seçtiğiniz şeklin iç bölgesinde kalır mı? Cevaplarınızı gerekçeleriyle birlikte ifade ederek görüşlerinizi sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

2. Verilen çokgenlerden herhangi bir iç açısının ölçüsü 180° den büyük olan çokgenler ile her bir iç açısının ölçüsü 180° den küçük olan çokgenleri birbirinden ayrıştırarak bu çokgenleri sırasıyla içbükey ve dışbükey çokgenler olacak şekilde tasnif ediniz. Bu işlemleri yaparken açıölçer (iletki) kullanabilirsiniz.

3. 1 ve 2. maddede oluşturduğunuz gruplandırmalardan yararlanarak aşağıdaki tabloyu örneklerdeki gibi doldurunuz.

Çokgen	İsimlendirilmesi	Çokgen	İsimlendirilmesi
			
	İçbükey dokuzgen		
			Dışbükey yedigen
			
			
			

Çokgenlerde içbükey veya dışbükey kavramını içeren Çalışma Kağıdı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Geometrik süsleme sanatı, taşıdığı anlamlarla geçmişten bugüne birçok mimari eserde yerini almıştır. Özellikle Anadolu Selçuklu Dönemi'nde pek çok eserde karşımıza çıkan geometrik motifler daha sonra Osmanlı Dönemi'nde bir süsleme sanatı hâline gelmiştir. Çevremizdeki mimari eserlerin çoğunda bu şekillere sıkça rastlamaktayız.

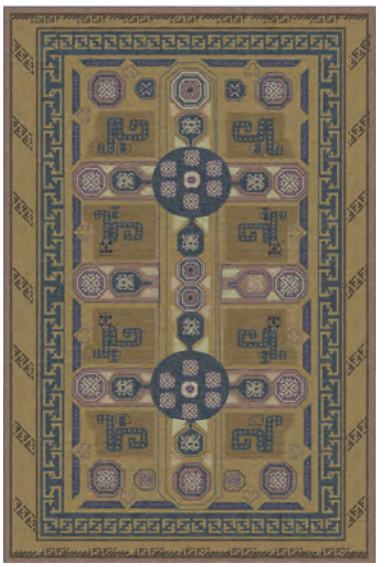
Geçmişten bugüne birçok nesne ve yapıda karşımıza çıkan süslemeler desen, figür, bitkisel ve geometrik motiflerle oluşturulmuştur. Türk tarihinde geometrik kavramların "süsleme" unsuru olarak kullanılmasına İslam öncesi dönemlerde başlanmış ancak bu tarz süslemelere Selçuklu Dönemi eserlerinde daha çok yer verilmiştir. Geometrik şekillerdeki geleneksel Türk motifleri camilerdeki çini, mihrap, minber ve kapı süslemelerinde sıkça kullanılmaktadır.

Türk halı ve dokuma sanatı kültürümüzün önemli temel unsurları içerisinde yer almaktadır. Birtakım nesnelere benzetilmelerinden hareketle ortaya çıkan bu şekillerde duygu, hayal ve düşünce gibi soyut kavramların ifadesinin halı ve dokumacılık sanatındaki yansımalarını net bir şekilde görebilmekteyiz. Halı ve dokumalardaki her figür, şekil ve motif aslında yüzyıllar öncesine dayanan bir inanışın ürünüdür. Bu nedenle halı, kilim veya mezar taşlarındaki herhangi bir motif; bir sanat eseri olmaktan ziyade bir duyguyu, davranışı, düşünceyi ve kısaca bir toplumun tarihini yansıtan bir belge niteliği taşır.

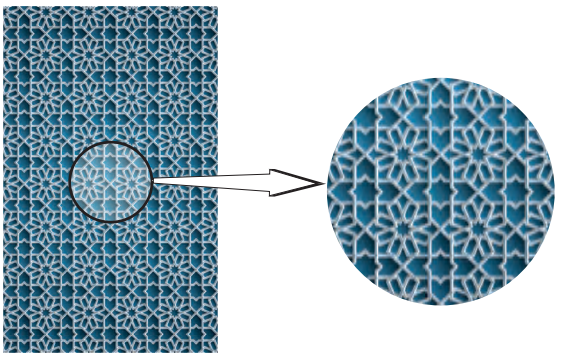
Aşağıda Türk-İslam kültürüne ve farklı kültürlere ait görseller yer almaktadır.



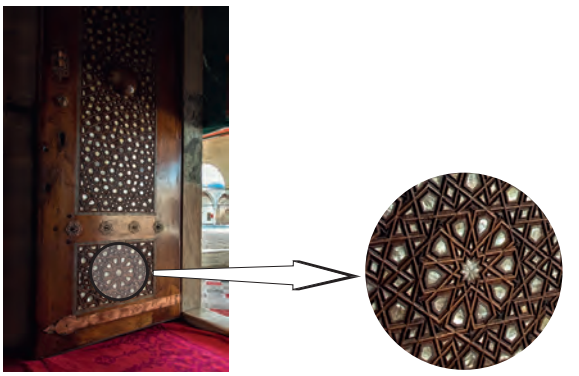
Görsel 2.4: *Anadolu'da kullanılan bir halı modeli*



Görsel 2.5: *Çin halısı modeli çizimi*



Görsel 2.6: *Selçuklu mimarisindeki tekrar eden desenlerden oluşan süslemeler*



Görsel 2.7: *Mihrimah Sultan Camii batı giriş kapısı*

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Alıştırmalar

1. Aşağıda bir evin duvarını kaplayan duvar kâğıdının görseli verilmiştir.



Buna göre

a) Görseldeki duvar kâğıdında tek renkten oluşan şekiller kenar sayılarına göre sınıflandırıldığında kaç çeşit çokgen elde edileceğini bulunuz.

b) Görseldeki duvar kâğıdında tek renkten oluşan çokgenleri, kenar sayılarına ve içbükey–dışbükey olma durumlarına göre sınıflandırarak kaç farklı çokgen elde edilebileceğini bulunuz. Bulduğunuz çokgenleri isimlendiriniz.

2. Aşağıda birer özelliği verilen çokgenlerin içbükey mi dışbükey mi olduğunu tablodaki ilgili kutucuklara işaretleyerek belirleyiniz.

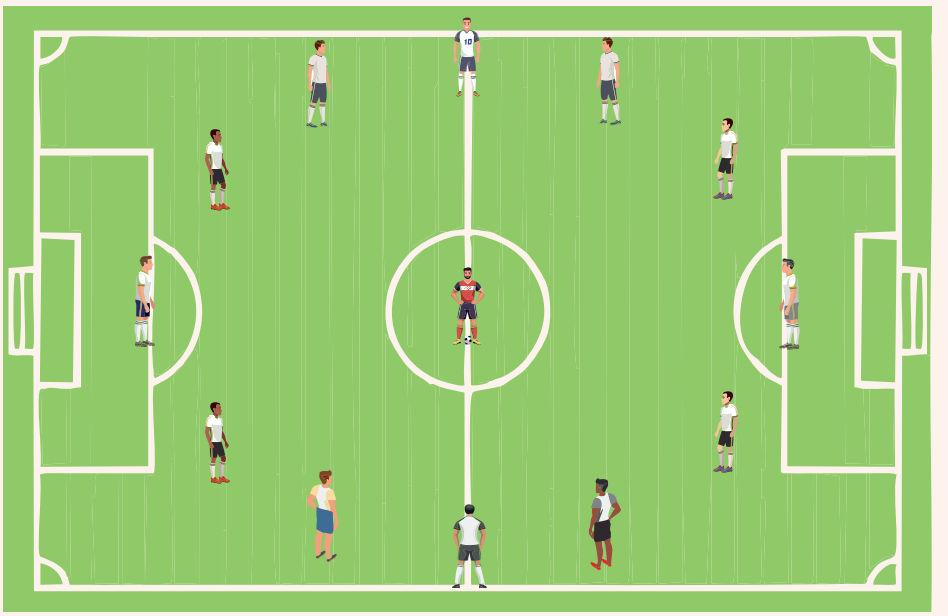
Çokgen	Özellik	İçbükey	Dışbükey
I	Tüm iç açıların ölçüleri 180° den küçüktür.		
II	Köşegenleri çizildiğinde bu köşegenlerden en az biri çokgenin dış bölgesine taşar.		
III	İç bölgesinde alınan iki nokta arasındaki doğru parçası her zaman çokgenin iç bölgesinde kalır.		

2.4. DIŞBÜKEY ÇOKGENLERİN ÖZELLİKLERİ

Konuya Başlarken

10. yüzyılda yaşayan Farabi, Türk İslam dünyasının en önemli filozoflarından ve bilim insanlarından biridir. Matematik, mantık, müzik ve özellikle geometri alanında kapsamlı incelemeler yapmıştır. Farabi dışbükey dörtgen, beşgen ve çokgenleri sistemli biçimde inceleyerek bu şekilleri daha basit parçalara ayırıp açılarını, alanlarını ve köşegenlerini analiz etmeye yönelik yenilikçi yöntemler geliştirmiştir. Bu yaklaşımıyla çokgenlerin merkezden üçgenlere bölünmesi, iç ve dış açıların ölçülerinin sistematik olarak hesaplanması gibi yöntemlerin temelini atmıştır. Farabi'nin bu analitik yaklaşımı, günümüzdeki geometrik düşüncenin yapı taşlarından biri olmuştur.

Örneğin bir futbol antrenmanında pas becerileri ve konumlanma farkındalıklarının geliştirilmesi amacıyla 12 futbolcu, teknik direktörün etrafında ve ona eşit uzaklıkta olacak şekilde konumlandırılabilir. Bu düzen, tıpkı Farabi'nin incelediği çokgenlerde olduğu gibi oyuncuların belirli açı ve mesafelerle yerleşmesini sağlayarak antrenmanın verimini artıracaktır.



Bu amaçla aşağıda iki farklı antrenman örneği verilmiştir.

Yukarıdaki görseli inceleyerek antrenmanlarla ilgili soruların cevaplarını arkadaşlarınızla paylaşınız.

Antrenman I: Teknik direktör, herhangi bir futbolcudan başlayarak sırasıyla her bir futbolcuyla paslaşacaktır.

1. **Teknik direktörün, futbolcu sayısına bağlı olarak <u>en fazla</u> kaç farklı futbolcuya pas atabileceğini bulunuz.**

2. **Ardışık iki futbolcu arasındaki uzaklığın aynı olması durumunda teknik direktörün ardışık iki futbolcunun birinden aldığı pası diğer futbolcuya atabilmesi için yönünü kaç derece değiştirmesi gerektiğini bulunuz.**

Antrenman II: Her futbolcu, her iki yanındaki futbolcular haricindeki diğer futbolcularla pas çalışması yapacaktır.

1. **Herhangi bir futbolcunun, futbolcu sayısına bağlı olarak en fazla kaç farklı futbolcuya pas atabileceğini bulunuz.**

2. **Futbolcu sayısı değiştikçe bir futbolcunun diğer futbolculara attığı pas sayısının nasıl değişeceğini bulunuz.**

Kenar, açı, köşegen, simetri ve alan özellikleriyle dışbükey çokgenler; doğada ve insan yapımı tasarımlarda stratejik bir rol oynar. Mimaride ve mühendislikte en verimli alanların oluşturulmasında kullanılan dışbükey çokgenler, aynı zamanda süsleme sanatlarında estetik ve düzeni sağlayan simetri özellikleriyle de öne çıkar. Dışbükey çokgenler içinde özel bir yere sahip olan düzgün çokgenler ise eşit kenar uzunlukları ve açı ölçüleriyle mimariye ve tasarıma hem dayanıklılık hem de görsel bir ahenk katar. Bu çokgenlerin alan özelliklerinin anlaşılması, verimli ve estetik çözümler üretmenin anahtarıdır.

13. Uygulama

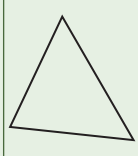
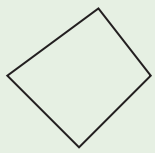
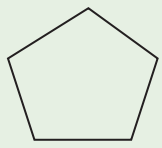
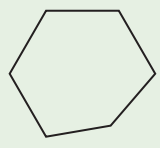
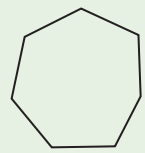
Dışbükey Çokgenlerin Köşegen ve Açı Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. Dışbükey çokgenlerin bir köşesinden en fazla kaç köşegen çizilebileceğine ve bir köşesinden çizilen köşegenlerle çokgenin kaç üçgene ayrılabileceğine dair varsayımlarınızı yazınız.

2. Tablo 1'de verilen çokgenlerin bir köşesinden çizilebilecek en fazla köşegen sayısı ve bu köşegenlerle çokgenlerin içinde oluşabilecek üçgen sayılarını bularak tablodaki ilgili yerlere yazınız.

Tablo 1

Kenar sayısı	3	4	5	6	7
Çokgen					
Bir köşesinden çizilebilecek en fazla köşegen sayısı					
Çizilen köşegenlerle oluşan üçgen sayısı					

3. Tablo 1'den elde edeceğiniz örüntüler yardımıyla kenar sayısı verilen bir çokgenin bir köşesinden en fazla kaç tane köşegen çizilebileceği ve bu köşegenlerle çokgenin içinde kaç tane üçgen oluşabileceğine yönelik genellemenizi sınıf arkadaşlarınızla saygı ve nezaket kuralları çerçevesinde tartışarak ifade ediniz.

4. Kenar sayısı verilen bir çokgenin bir köşesinden kaç tane köşegen çizilebileceği ve bu köşegenlerle çokgenin içinde en fazla kaç tane üçgen oluşabileceğine yönelik genellemenizi varsayımlarınızla karşılaştırarak önermelerinizi yazınız.

5. Elde ettiğiniz önermeleri aşağıdaki gerçek yaşam durumu probleminde uygulayınız ve kullanışlılık açışından değerlendiriniz.



Zeynep arkadaşlarıyla birlikte yukarıdaki ongen biçimindeki pastayı yapmıştır. Zeynep herhangi bir köşesinden pastayı doğrusal bir biçimde kesmek istiyor.

Buna göre

a) Pastanın belirli bir köşesinden diğer köşelere doğrusal olarak en fazla kaç farklı kesim yapabilir?

b) Pastanın belirli bir köşesinden diğer köşelere doğrusal olarak yapılan kesimler pastayı en fazla kaç üçgensel bölgeye ayırır?

c) b maddesine göre elde ettiğiniz parça sayısı ve üçgende açı özellikleri kullanılarak ongen biçimindeki pastanın iç açı ölçüleri toplamına ulaşılıp ulaşılamayacağını tartışınız.

ç) Ongen biçimindeki pastanın dış açıları ölçüleri toplamı ile ilgili çıkarımlarınızı yazınız. Pastanın kenar sayısının değişmesinin dış açı ölçüleri toplamını değiştirip değiştirmeyeceğini tartışınız.

11. Örnek

n kenarlı bir çokgen için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Çokgenin herhangi bir köşesinden çizilebilecek en fazla köşegen sayısını ve çizilen köşegenlerle oluşacak üçgen sayısını bulunuz.
2. Çokgenin iç açı ölçüleri toplamını kenar sayısına bağlı olarak ifade ediniz.
3. Çokgenin dış açı ölçüleri toplamını bulunuz.

Çözüm

1. Bir çokgenin bir köşesinden çizilen en fazla köşegen sayısını, kenar sayısının üç eksiği ve çizilen köşegenlerle oluşan üçgen sayısı, kenar sayısının iki eksiğidir.
   Bu durumda n kenarlı bir çokgenin bir köşesinden çizilen köşegen sayısı $(n-3)$ tür. Çizilen köşegenlerle oluşan üçgen sayısı $(n-2)$ dir.
2. Çokgenin iç açı ölçüleri toplamı, üçgenin iç açı ölçüleri toplamı ve oluşan üçgen sayısının çarpılmasıyla bulunur. Bu durumda n kenarlı bir çokgenin iç açı ölçüleri toplamı $(n-2)\cdot 180^\circ$ olarak bulunur.
3. Çokgenin her bir köşeye ait iç ve dış açı ölçüleri toplamı 180° ve n köşesindeki açıların ölçüleri toplamı $n\cdot 180^\circ$ dir.
   Dış açı ölçüleri toplamı $n\cdot 180^\circ-(n-2)\cdot 180^\circ=180^\circ\cdot n-180^\circ\cdot n+360^\circ$ olarak bulunur.
   Bu durumda dış açı ölçüleri toplamı kenar sayısından bağımsız olarak 360° dir.

Sıra Sizde 11

Yeni nesil sürücüsüz bir araba, belirli bir kod girilerek test sürüşüne çıkarılıyor. Bu koda göre aracın nasıl hareket edeceği aşağıda belirtilmiştir.

- Araç bulunduğu konumdan doğrusal olarak hareket edecek ve eşit uzaklıktaki durak noktalarına ilerleyecektir.
- Araç her durak noktasına ulaştığında direksiyonu bir önceki izlediği yol ile 115° lik bir açı oluşturacak şekilde sürekli aynı yöne döndürülecektir.

Bir süre boyunca belirtilen kurallara uygun şekilde ilerleyen aracın bir noktada kalibrasyonu bozulduğu için bu noktadan sonra aldığı son iki yolun oluşturduğu açıların ölçüleri sırasıyla 105°, 110° ve 115° olarak ölçülüyor. Araç, yolculuğunu başladığı noktada tamamladığında izlediği yol dışbükey bir çokgen oluşturmaktadır.

Buna göre aracın başlangıçtan itibaren ulaştığı toplam durak sayısını bulunuz.

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Tüm kenar uzunlukları ve tüm iç açılarının ölçüleri eşit olan çokgenlere **düzgün çokgen** denir. Bir düzgün çokgenin iç açılarının ölçüleri birbirine eşit olduğundan dış açılarının ölçüleri de birbirine eşittir.

Matematik Tarihinden Notlar

Ebu Sehl Kuhi ve Düzgün Çokgenlerin Çizimi Üzerine Çalışmaları



Görsel 2.8: *Ebu Sehl Kuhi (Temsilî)*

Ebu Sehl Kuhi, 10. yüzyılda yaşamış önemli bir İslam matematikçisidir (Görsel 2.8). Özellikle geometri alanındaki çalışmalarıyla tanınır. Antik Yunan matematikçileri Öklid ve Apollonius'un eserlerinden esinlenerek düzgün çokgenlerin cetvel ve pergel ile çizimine dair yenilikçi yöntemler geliştirmiştir.

Kuhi, yalnızca temel çokgenlerle değil, daha fazla kenarlı ve karmaşık çokgenlerin çizimiyle de ilgilenmiştir. Öklid'in "Elementler" adlı eserindeki klasik yöntemleri geliştirerek, belirli açı ölçüleri ve uzunluklar kullanarak çokgen çizimi için alternatif yollar önermiştir. Özellikle yedigen ve dokuzgen gibi düzgün çokgenlerin yaklaşık çizimine yönelik çalışmaları dikkat çekicidir.

Kuhi yalnızca matematik alanında değil astronomi ve mühendislik gibi alanlarda da çalışmalar yapmıştır. Küresel geometriye duyduğu ilgi sayesinde, küresel yüzeyler üzerinde çokgen çizimi konusunda da önemli çalışmalar yapmıştır.

Araştırma Ödevi

Aşağıdaki görevleri gerçekleştirerek araştırma ödevini öğretmeninizin belirlediği süre içinde eksiksiz olarak tamamlayınız.

- Düzgün çokgenlerin (örneğin düzgün altıgen, düzgün sekizgen) Türk-İslam mimarisindeki kullanım alanlarını, estetik, matematiksel ve işlevsel katkılarını araştırınız.
- Araştırmanızda örnek olarak bazı Türk-İslam eserlerini seçiniz.
  Örneğin Selimiye Camii (Edirne), Karatay Medresesi (Konya), Divriği Ulu Camii (Sivas), Bursa Yeşil Türbe ve Süleymaniye Camii (İstanbul).
- Seçtiğiniz eserlerde hangi düzgün çokgenlerin (örneğin düzgün beşgen, düzgün altıgen, düzgün sekizgen) kullanıldığını ve bu çokgenlerin mimaride nasıl ve neden tercih edildiğini araştırınız.
- Elde ettiğiniz bilgileri görsellerle (fotoğraf, çizim, geometrik şema vb.) destekleyiniz.
- Çalışmanızın tüm aşamalarını düzenli, anlaşılır ve doğru matematiksel açıklamalar içeren bir rapor hâline getirip sınıf arkadaşlarınıza sununuz.
- Çalışmanız öğretmeniniz tarafından analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

14. Uygulama

Düzgün Çokgenlerin Bir İç ve Bir Dış Açısının Ölçüsünü Bulma

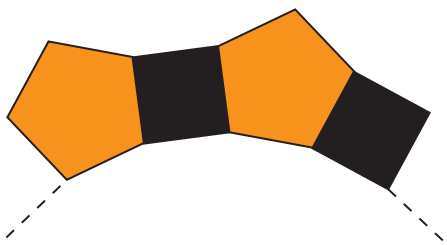
Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri örnekteki gibi doldurunuz.

Çokgen	İç Açı Ölçüleri Toplamı	Dış Açı Ölçüleri Toplamı	Bir İç Açısının Ölçüsü	Bir Dış Açısının Ölçüsü
Düzgün Beşgen	$3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$	360°	$\frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$	$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$
Düzgün Altıgen				
Düzgün Sekizgen				
Düzgün Dokuzgen				
Düzgün Onikigen				
Düzgün Onbeşgen				

2. Tablodan elde ettiğiniz bilgiler ve düzgün çokgenin tanımından yola çıkarak n kenarlı bir düzgün çokgenin bir iç ve bir dış açı ölçüsünü veren bağıntıları kenar sayısına bağlı olarak yazınız.

3. 2. maddede yazdığınız bağıntılar yardımıyla aşağıdaki soruyu çözünüz.

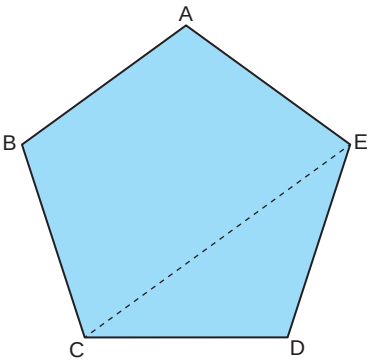


Yandaki şekilde birer kenarları ortak olan turuncu renkli düzgün beşgen ile siyah renkli kare yan yana getirilerek yeni bir düzgün çokgen elde ediliyor.

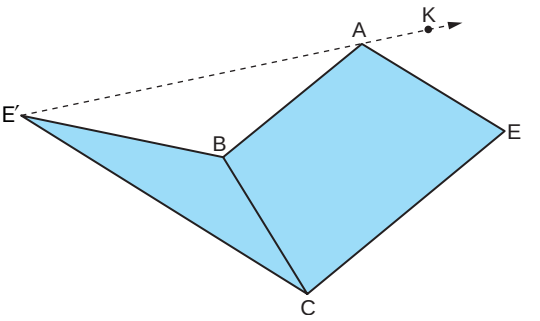
Buna göre oluşan düzgün çokgenin kenar sayısını bulunuz.

12. Örnek

Şekil 1'deki ABCDE düzgün beşgeni CE köşegeni boyunca kesiliyor, oluşan şekillerden CDE üçgeninin CD kenarı ile ABCE dörtgeninin BC kenarı üst üste gelecek şekilde yapıştırılarak Şekil 2 elde ediliyor.



Şekil 1



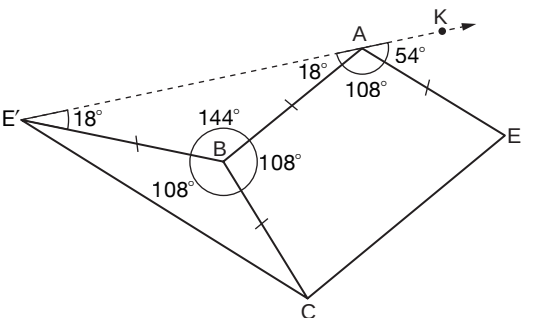
Şekil 2

Buna göre E′, A ve K noktası doğrusal olmak üzere $m(\widehat{EAK})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

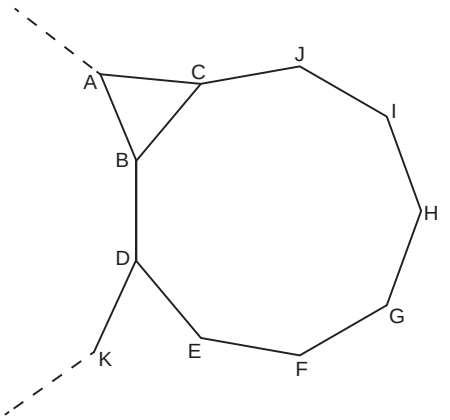
Çözüm

ABCDE düzgün beşgen olduğundan CE′B üçgeninde $|BC| = |BE'|$ ve ABE′ üçgeninde $|BE'| = |AB|$ ve $m(\widehat{CBE'}) = m(\widehat{ABC}) = 108°$ dir. $m(\widehat{ABE'}) = 144°$ olur. ABE′ üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{BE'A}) = m(\widehat{BAE'}) = 18°$ dir. $m(\widehat{BAE}) = 108°$ olur.

E′, A ve K noktaları doğrusal olduğundan $m(\widehat{EAK}) = 54°$ olarak bulunur.



Sıra Sizde 12



Yandaki şekilde birer kenarı ortak olan düzgün dokuzgen ve bir kısmı görünen düzgün onbeşgen verilmiştir.

Buna göre $m(\widehat{BAC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

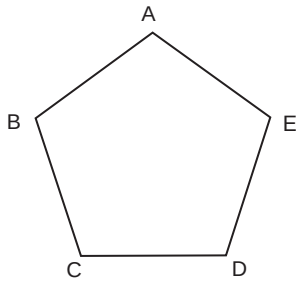
15. Uygulama

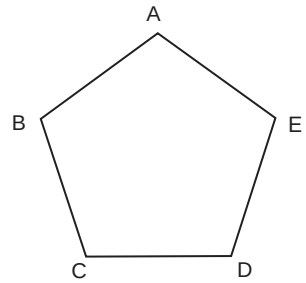
Düzgün Çokgenlerin Köşegen ve Simetri Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. Kenar sayısı tek sayı olan düzgün çokgenler ile kenar sayısı çift sayı olan düzgün çokgenlerin köşegen ve simetri özelliklerine dair varsayımlarınızı yazınız.

2. Aşağıdaki düzgün beşgenler için farklı birer köşe belirleyiniz ve bu köşelere ait köşegenleri çiziniz.





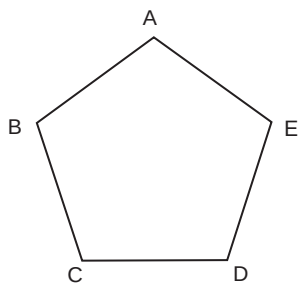
Buna göre

a) Oluşan her bir üçgenin iç açı ölçülerini hesaplayınız.

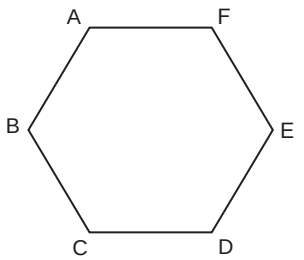
b) Oluşan üçgenlerden eş üçgen olanları bulunuz.

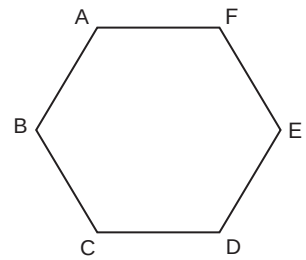
c) Düzgün beşgenin kaç farklı uzunlukta köşegeni olduğunu bulunuz.

ç) Aşağıda verilen düzgün beşgenin her bir köşesine ait iç açıortayları çizerek, bu açıortayların simetri ekseni olup olmadığını ve bir noktada kesişip kesişmediğini belirleyiniz.



3. Aşağıdaki düzgün altıgenler için farklı birer köşe belirleyiniz ve bu köşelere ait köşegenleri çiziniz.





Buna göre

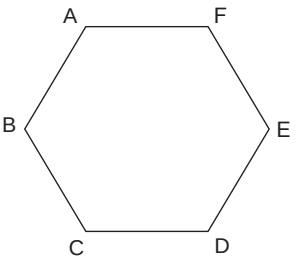
a) Oluşan her bir üçgenin iç açı ölçülerini hesaplayınız.

b) Oluşan üçgenlerden eş üçgen olanları bulunuz.

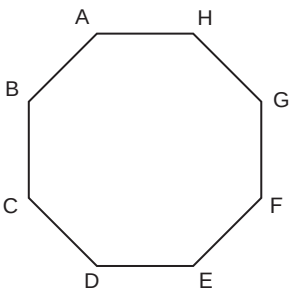
c) Düzgün altıgenin kaç farklı uzunlukta köşegeni olduğunu bulunuz.

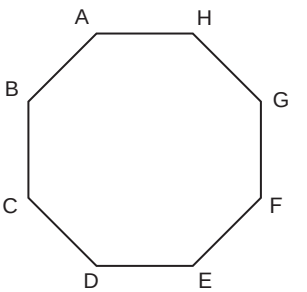
ç) Düzgün altıgenin köşegen uzunluklarını düzgün altıgenin bir kenar uzunluğu cinsinden ifade ediniz.

d) Aşağıda verilen düzgün altıgenin her bir köşesine ait iç açıortayları çiziniz, bu açıortayların simetri ekseni olup olmadığını ve bir noktada kesişip kesişmediğini belirleyiniz.



4. Aşağıdaki düzgün sekizgenler için farklı birer köşe belirleyiniz ve bu köşelere ait köşegenleri çiziniz.





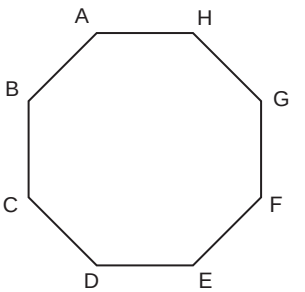
Buna göre

a) Oluşan her bir üçgenin iç açı ölçülerini hesaplayınız.

b) Oluşan üçgenlerden eş üçgen olanları belirleyerek yazınız.

c) Düzgün sekizgenin kaç farklı uzunlukta köşegeni olduğunu belirleyerek yazınız.

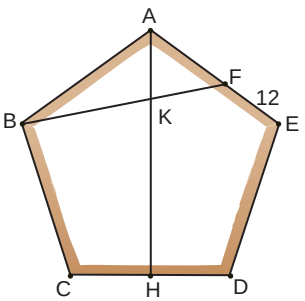
ç) Aşağıda verilen düzgün sekizgenin her bir köşesine ait iç açıortayları çiziniz, bu iç açıortayların simetri ekseni olup olmadığını ve bir noktada kesişip kesişmediğini belirleyiniz.



5. Kenar sayısı tek sayı olan düzgün çokgenler ile kenar sayısı çift sayı olan düzgün çokgenlerin köşegen ve simetri özellikleri ile ilgili örüntülere dair genellemelerinizi yazınız.

6. Kenar sayısı tek sayı olan düzgün çokgenler ile kenar sayısı çift sayı olan düzgün çokgenlerin köşegen ve simetri özelliklerine yönelik genellemenizi varsayımlarınızla karşılaştırarak önermelerinizi yazınız.

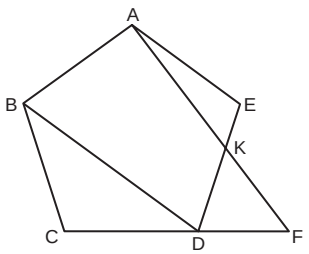
7. Elde ettiğiniz önermeleri aşağıdaki gerçek yaşam durumu probleminde uygulayınız ve kullanışlılık açısından değerlendiriniz.



Yandaki şekilde A, B, C, D ve E köşeleri ile F ve H noktalarında çivi bulunan ABCDE düzgün beşgen şeklinde bir tahta çerçeve verilmiştir. $H \in [CD]$, $F \in [AE]$ olmak üzere A noktasından H noktasına ve B noktasından F noktasına gergin bir ip çekilerek sabitleniyor. $[BF] \cap [AH] = \{K\}$ ve $[AH]$ tahta çerçeveyi iki eş parçaya ayırıyor. $|FE| = 12$ cm ve $2 \cdot |BK| = 3 \cdot |KF|$ olarak veriliyor.

Buna göre ABCDE düzgün beşgeni şeklindeki tahtayı çevreleyen ipin uzunluğunun kaç santimetre olduğunu bulunuz.

13. Örnek

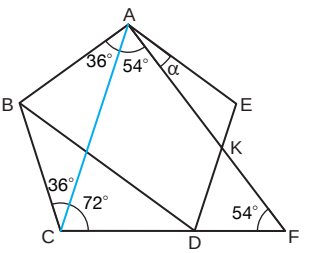


Yandaki ABCDE düzgün beşgeninde $|BD| = |CF|$; $K \in [DE]$; C, D, F ve A, K, F noktaları doğrusal olarak veriliyor.

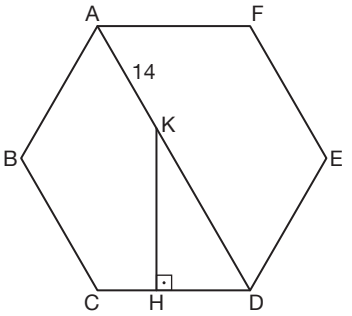
Buna göre $m(\widehat{EAF})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

$m(\widehat{EAF}) = \alpha$ olsun. Düzgün beşgenin bütün köşegen uzunlukları eşit olduğundan $[AC]$ çizildiğinde $|AC| = |CF|$ olacak şekilde ACF ikizkenar üçgeni elde edilir. Düzgün beşgenin bir iç açısının ölçüsü 108° olduğundan $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = 36^\circ$ ve $m(\widehat{ACD}) = 72^\circ$ olur. Buradan ACF ikizkenar üçgeninde $m(\widehat{CAF}) = m(\widehat{AFC}) = 54^\circ$ olacaktır. Buradan $36^\circ + 54^\circ + \alpha = 108^\circ \Rightarrow \alpha = 18^\circ$ olarak bulunur.



14. Örnek



Şekilde ABCDEF düzgün altıgen, $[KH] \perp [CD]$, $K \in [AD]$, $H \in [CD]$ ve $|AK| = 14$ birim olarak veriliyor.

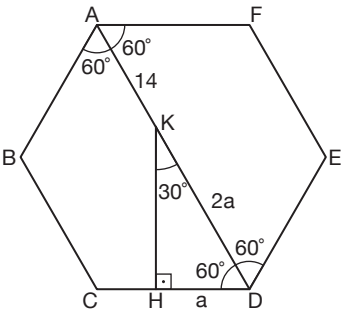
Buna göre $|CH|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm

$[AD]$ simetri ekseni olduğundan bulunduğu köşelerdeki açıların ölçüleri 60° olur. KDH üçgeni $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgenidir. $|HD| = a$ birim olsun. Bu durumda $|KD| = 2a$ birim olur. Düzgün altıgende en uzun köşegen uzunluğu bir kenar uzunluğunun iki katı olduğundan

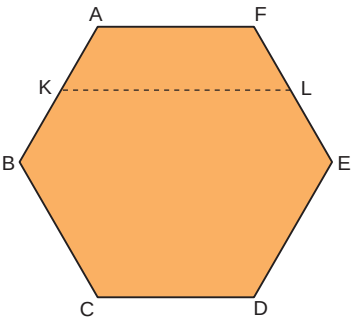
$|AD| = 2 \cdot |CD| \Rightarrow 2a + 14 = 2a + 2 \cdot |CH|$

$\Rightarrow |CH| = 7$ birim olarak bulunur.

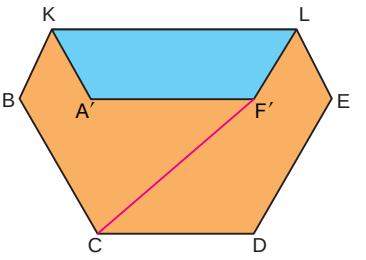


Sıra Sizde 13

Şekil 1'deki ön yüzü turuncu arka yüzü mavi olan ABCDEF düzgün altıgen biçimindeki kâğıt $[KL]$ boyunca katlandığında Şekil 2'deki gibi A noktası A', F noktası F' noktası ile çakışmaktadır.



Şekil 1



Şekil 2

K ve L noktaları sırasıyla AB ve FE kenarlarının orta noktaları ve $|CF'| = 3\sqrt{7}$ birim olduğuna göre Şekil 1'deki kâğıdın çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

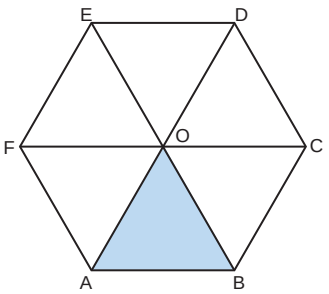
16. Uygulama

Düzgün Çokgenlerde Alan Hesabı

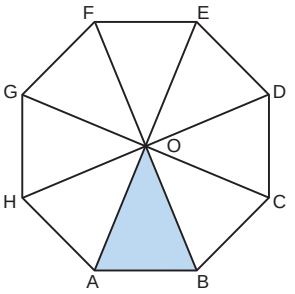
Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. Düzgün altıgen, düzgün sekizgen ve düzgün onikigenin alanlarının nasıl bulunacağına yönelik varsayımlarınızı yazınız.

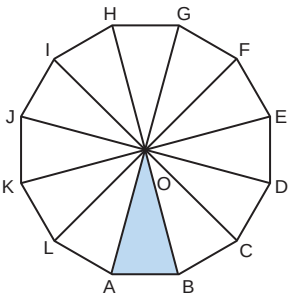
2. Aşağıdaki düzgün altıgen, düzgün sekizgen ve düzgün onikigenin simetri ekseni olan köşegenleri çizilmiştir. Buna göre çizilen köşegenler yardımıyla soruları cevaplayınız.



Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3

a) Şekil 1'deki AOB açısının ölçüsünü bulunuz. AOB üçgeninin alanı yardımıyla düzgün altıgenin alanının nasıl hesaplanabileceğini yazınız.

b) Şekil 2'deki AOB açısının ölçüsünü bulunuz. AOB üçgeninin alanı yardımıyla düzgün sekizgenin alanının nasıl hesaplanabileceğini yazınız.

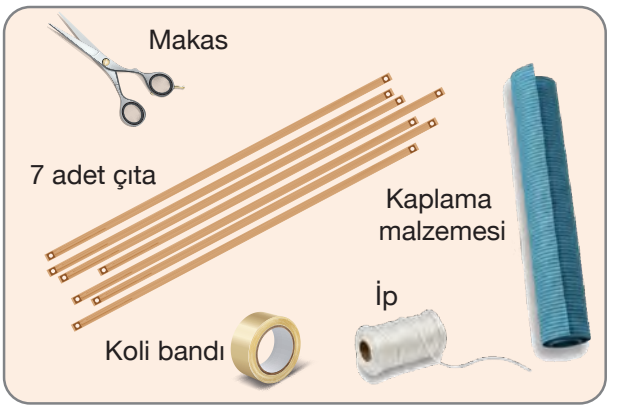
c) Şekil 3'teki AOB açısının ölçüsünü bulunuz. AOB üçgeninin alanı yardımıyla düzgün onikigenin alanının nasıl hesaplanabileceğini yazınız.

3. Düzgün altıgen, düzgün sekizgen ve düzgün onikigenin alanlarının nasıl bulunabileceğine yönelik örüntünüzü genelleyiniz ve bulduğunuz sonuçları yazınız.

4. Düzgün altıgen, düzgün sekigen ve düzgün onikigenin alanlarının nasıl bulunabileceğine yönelik genellemenizi varsayımlarınızla karşılaştırarak her birini önermeler şeklinde yazınız.

5. Elde ettiğiniz önermeleri aşağıdaki gerçek yaşam durumu probleminde uygulayınız ve kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

Hafta sonu ailesiyle pikniğe gitmeyi planlayan Ömer Bey, çocuklarına uçurtma yapmak istemiştir. Ömer Bey'in uçurtma yapımı için hazırlamış olduğu 60 cm uzunluğunda 7 adet özdeş çıta ve diğer gerekli malzemeler aşağıdaki görselde verilmiştir.



Uçurtma yapımı için uygulanması gereken adımlar aşağıdaki gibidir.

I. Çıtalar orta noktaları üst üste gelecek şekilde ayarlanır.

II. Çıtalar, uç noktaları arasındaki uzaklıklar eşit olacak biçimde orta noktalarından iple birbirine bağlanarak sabitlenir ve böylece uçurtmanın iskeleti oluşturulur.

III. Çıtaların uç noktalarında bulunan deliklerden yararlanılarak uçurtmanın iskeleti ip ile çevrilir.

IV. Kaplama malzemesi makas ve bant yardımıyla iskeletin üzerine kaplanarak uçurtmanın gövdesi tamamlanır.

V. Uçurtmanın orta noktası ile ardışık iki köşesi, eşit uzunlukta iplerle birbirine bağlanarak uçurtmanın havada dengeli uçmasını sağlayan bağlantı noktası oluşturulur.

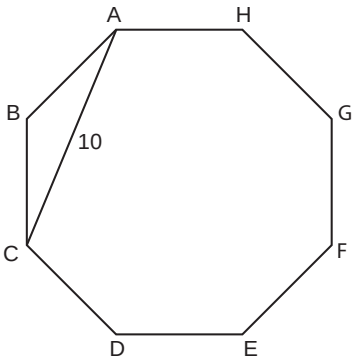
VI. Artan kaplama malzemesi kullanılarak uçurtmanın dengesini sağlayacak uzunlukta kuyruk yapılır ve uçurtma tamamlanır.

Buna göre

a) Ömer Bey yukarıdaki adımları uygulayarak çocuklarına biri üç, diğeri dört çıtadan oluşan iki farklı uçurtma yapmıştır. Uçurtmaların kaplanan yüzey alanları toplamının kaç cm^2 olduğunu hesaplayınız.

b) Aynı şekilde, çıtalardan altı tanesi kullanılarak yapılacak uçurtmanın kaplanan yüzey alanının kaç cm^2 olacağını hesaplayınız.

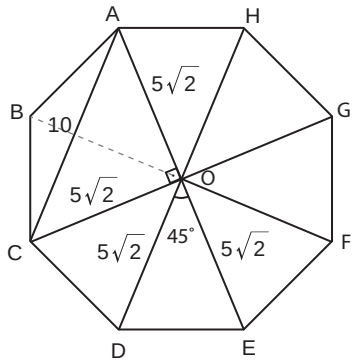
15. Örnek



Yandaki düzgün sekizgende $|AC| = 10$ cm olarak veriliyor.
Buna göre düzgün sekizgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm

Düzgün sekizgene ait iç açıortay doğruları çizilirse ardışık iki iç açıortay doğrusu arasında merkezde oluşan açının ölçüsü $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ olarak bulunur.



$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{COD}) = m(\widehat{DOE}) = m(\widehat{EOF}) = m(\widehat{FOG})$ ve
$m(\widehat{FOG}) = m(\widehat{GOH}) = m(\widehat{HOA}) = 45^\circ$ olur.

$m(\widehat{AOC}) = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ olur.

AOC ikizkenar dik üçgeninde $|AC| = 10$ cm olduğundan
$|OA|^2 + |OC|^2 = 10^2$ dolayısıyla $|OA| = |OC| = 5\sqrt{2}$ cm olur.

$$A(\widehat{DOE}) = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

$A(ABCDEFGH) = 8 \cdot A(\widehat{DOE})$ olduğundan $A(ABCDEFGH) = 8 \cdot \frac{25\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2}\,\text{cm}^2$ olarak bulunur.

Sıra Sizde 14



Yandaki görselde Sivas'ın Divriği ilçesinde bulunan, Mengücek Beyliği Dönemi'ne ait tarihî bir kümbet olan Sitte Melik Kümbeti verilmiştir. Düzgün sekizgen bir taban üzerine inşa edilmiş olup kümbet taş işçiliği ve mimari detaylarıyla dikkat çeker.

Bu kümbetin tabanının bir kenar uzunluğu yaklaşık $2\sqrt{2}$ metre olarak ölçülmüştür.

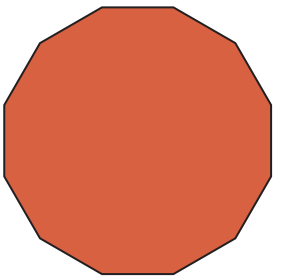
Buna göre kümbetin taban alanının yaklaşık kaç metrekare olduğunu hesaplayınız.

16. Örnek

Bir organizasyon firması düzenleyeceği etkinlikler için aşağıda Görsel 1'deki gibi tabanı düzgün onikigen şeklinde bir çadır kurmayı planlamaktadır. Görsel 2'de çadırın tabanının iki boyutlu modellenmiş hâli verilmiştir.



Görsel 1



Görsel 2

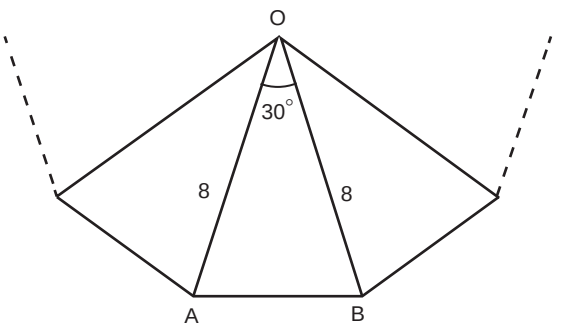
Çadırın zemini tamamen ahşap ile kaplanacaktır. Yapılan ölçümlerde çadırın tabanındaki birbirine en uzak iki nokta arasındaki mesafe 16 metre olarak hesaplanmıştır.

Buna göre çadırın tabanını kaplamak için toplam kaç metrekare ahşap gerektiğini bulunuz.

Çözüm

Kenar sayısı çift sayı olan düzgün çokgenlerde en uzun köşegen aynı zamanda çokgenin iç açıortay doğrusudur. Düzgün onikigene ait iç açıortay doğruları çizilirse 12 adet eş ikizkenar üçgen oluşur. Çizilen iç açıortay doğruları bir noktada kesişir ve çokgenin en uzun köşegen uzunluğunun yarısı, ikizkenar üçgenin eşit kenar uzunluklarını verir.

Bu durumun bir kısmı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Bu durumda $|AO| = |OB| = 8$ metre olur. Oluşan ikizkenar üçgenlerin tepe açısının ölçüsü

$m(\widehat{AOB}) = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ olur.

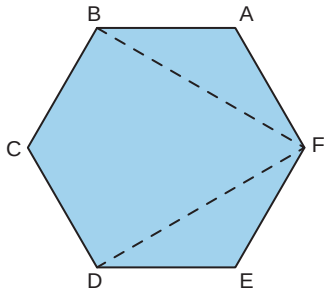
AOB üçgeninin alanını bulmak için sinüs alan formülü kullanılırsa

$A(\widehat{AOB}) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16$ metrekare olur.

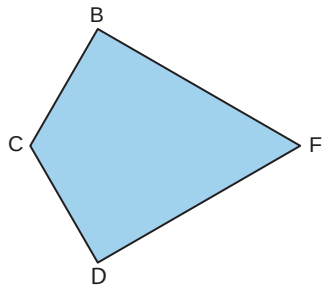
Düzgün onikigenin alanı ise $12 \cdot 16 = 192$ metrekare olarak bulunur.

17. Örnek

Şekil 1'deki bir kenar uzunluğu $4\sqrt{3}$ birim olan ABCDEF düzgün altıgeni kesikli çizgiler boyunca kesilerek Şekil 2 elde ediliyor.



Şekil 1



Şekil 2

Buna göre Şekil 2'de oluşan BCDF dörtgensel bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

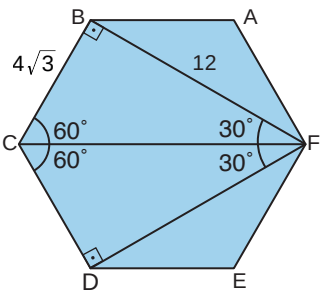
Çözüm

Şekil 1'de CF köşegeni çizilirse $m(\widehat{BCF}) = m(\widehat{DCF}) = 60^\circ$ ve $m(\widehat{BFC}) = m(\widehat{CFD}) = 30^\circ$ olarak bulunur. Buradan $m(\widehat{CBF}) = 90^\circ$ olur.

$|BC| = 4\sqrt{3}$ birim ise $|BF| = 12$ birim olur.

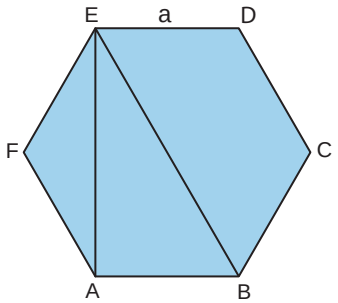
$A(\widehat{BCF}) = \dfrac{12 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$ birimkare, $A(\widehat{BCF}) = A(\widehat{CDF})$ olduğundan

$A(BCDF) = 2 \cdot 24\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ birimkare olarak bulunur.



Sıra Sizde 15

Bir kenar uzunluğu a birim olan ABCDEF düzgün altıgeni AE ve BE köşegenleri yardımıyla üç bölgeye ayrılmıştır.



Buna göre

1. **Düzgün altıgenin alanının a cinsinden kaç birimkare olduğunu bulunuz.**

2. **AEF, AEB ve BCDE bölgelerinin alanlarının a cinsinden kaç birimkare olduğunu bulunuz.**

3. $\dfrac{A(\widehat{AEF})}{A(ABCDEF)}$, $\dfrac{A(\widehat{AEB})}{A(ABCDEF)}$ **ve** $\dfrac{A(BCDE)}{A(ABCDEF)}$ **oranlarını bulunuz.**

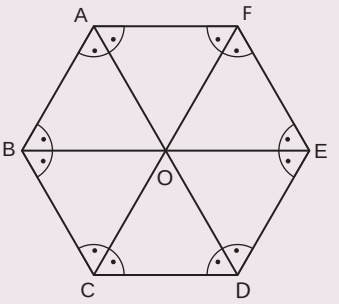
Dışbükey çokgenlerin kenar, açı, köşegen, simetri ve alan özelliklerini içeren Çalışma Kağıdı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

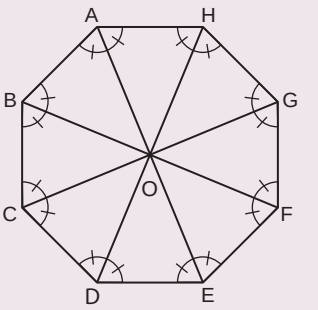
Kontrol Noktası

1. n kenarlı bir dışbükey çokgende
- Bir köşesinden çizilen köşegen sayısı $(n-3)$ tür.
- Bir köşesinden çizilen köşegenlerle $(n-2)$ tane üçgen oluşur.
- İç açılarının ölçüleri toplamı $(n-2)\cdot 180^\circ$ dir.
- Dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.

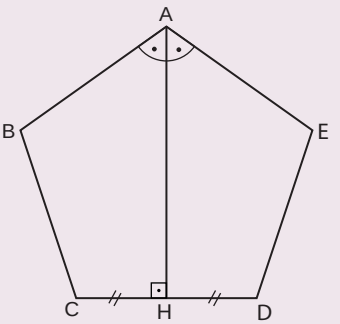
2. n kenarlı bir düzgün çokgende
- Tüm kenar uzunlukları birbirine eşittir.
- Bir iç açısının ölçüsü $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$ veya $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ dir.
- Bir dış açısının ölçüsü $\frac{360^\circ}{n}$ dir.

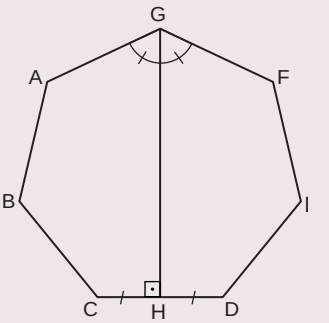
3. Kenar sayısı çift sayı olan düzgün çokgenlerin en uzun köşegeni, simetri ekseni ve iç açıortay doğrusudur. İç açıortayları bir noktada kesişir. Kenar sayısı çift sayı olan düzgün çokgenlerde karşılıklı kenarlar birbirine paraleldir.



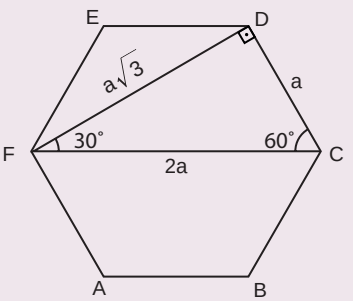


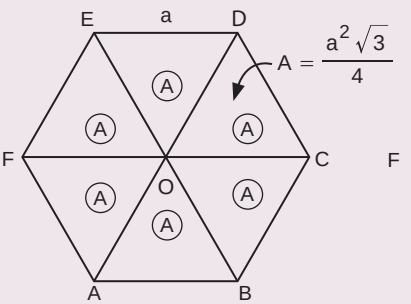
4. Kenar sayısı tek sayı olan düzgün çokgenlerde bir köşeden karşı kenara çizilen iç açıortay doğrusu simetri eksenidir.

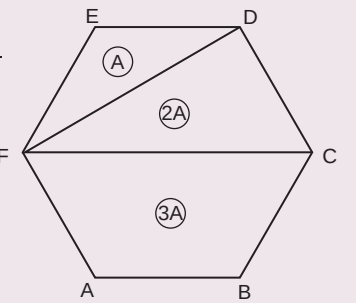




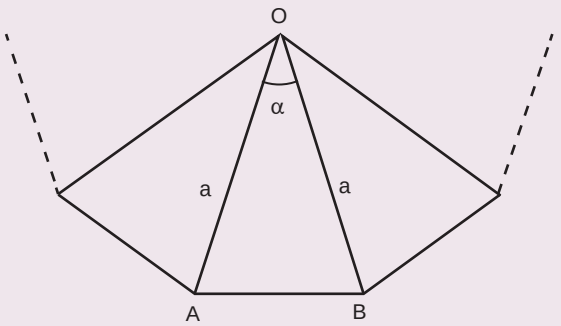
5. Bir kenar uzunluğu a birim olan düzgün altıgenin köşegen uzunlukları ve köşegenlerle oluşan alanlar A, 2A ve 3A bulundukları bölgelerin alanları olmak üzere alanlar arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.







6. n kenarlı bir düzgün çokgenin iç açıortaylarının kesim noktası O, O noktasının düzgün çokgenin köşelerine uzaklıkları a birim ve $m(\widehat{AOB}) = \alpha = \frac{360^\circ}{n}$ olmak üzere



Düzgün çokgenin alanı $= n \cdot A(\widehat{AOB}) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin\alpha$ birimkaredir.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki görselde verilen Türk Bayrağı üzerinde bulunan yıldızın geometrik yapısını inceleyen bir öğrenci, yıldızın düzgün bir beşgenin köşegenlerinin birleştirilmesiyle oluştuğunu fark etmiştir.



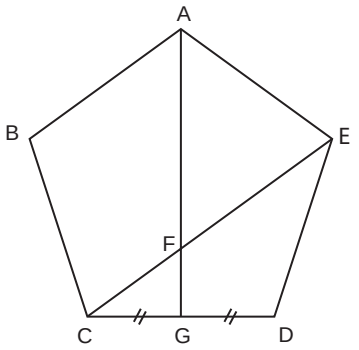
Buna göre yıldızın geometrik özelliklerinden yararlanarak aşağıdaki soruların doğru cevaplarını bulunuz.

a) Yıldızın sivri uçlarında oluşan tepe açılarından birinin ölçüsü kaç derecedir?

b) Yıldızın iç bölgesinde kaç farklı açı ölçüsü oluşur?

c) Yıldızın iç bölgesinde oluşan açılardan en geniş olanın ölçüsü kaç derecedir?

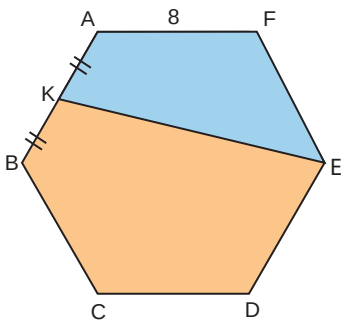
2.



Yandaki ABCDE düzgün beşgeninde $G \in [CD]$, $|CG| = |GD|$ ve $[AG] \cap [CE] = \{F\}$ olarak veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{AFE})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

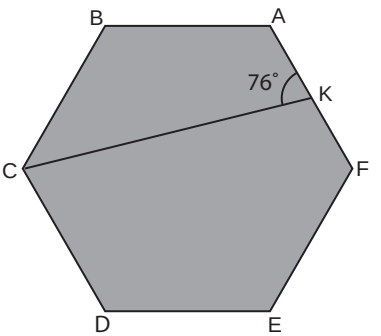
3.



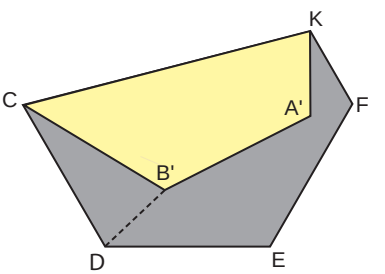
Yandaki ABCDEF düzgün altıgeninde $K \in [AB]$, $|BK| = |AK|$ ve $|AF| = 8$ cm olarak veriliyor.

Buna göre mavi renkli bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

4.



Şekil 1

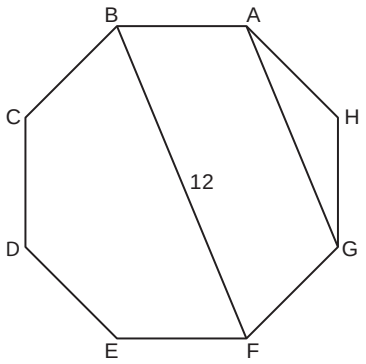


Şekil 2

Şekil 1'deki ön yüzü gri arka yüzü sarı olan ABCDEF düzgün altıgen biçimindeki bir kâğıt $[KC]$ boyunca katlandığında A ve B sırasıyla A′ ve B′ noktalarına gelerek Şekil 2 elde ediliyor.

$m(\widehat{AKC}) = 76°$ olduğuna göre $m(\widehat{B'DE})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

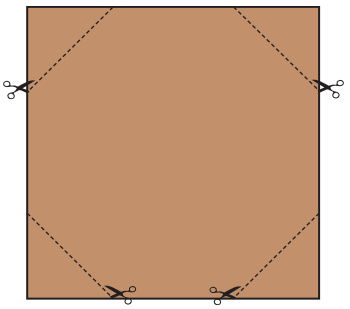
5.



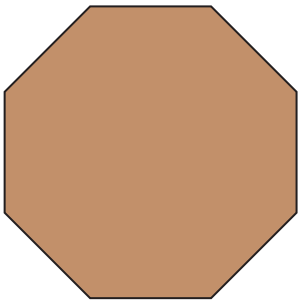
Yandaki şekilde ABCDEFGH düzgün sekizgen, $|BF| = 12$ cm olarak veriliyor.

Buna göre $|AG|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

6. Şekil 1'deki kare biçimindeki kartonun her köşesinden eş büyüklükte üçgen parçalar kesilerek Şekil 2'deki düzgün sekizgen elde edilmektedir. Kesilen üçgenlerin toplam alanı 16 birimkaredir.



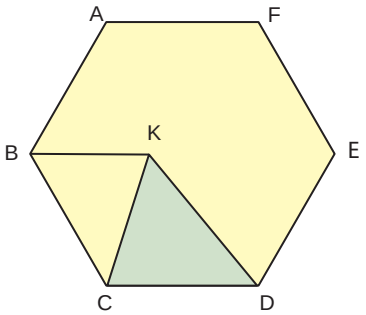
Şekil 1



Şekil 2

Buna göre Şekil 2'de görülen düzgün sekizgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

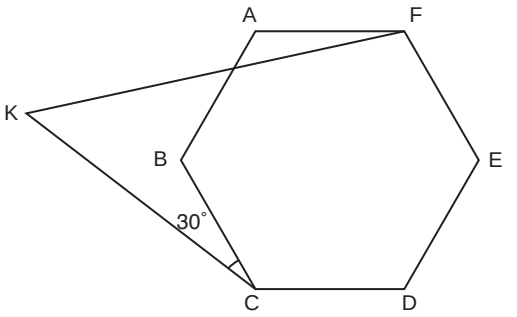
7.



Yandaki şekilde ABCDEF düzgün altıgen, K altıgenin içinde bir nokta, $[BK] \mathbin{/\!/} [CD]$ ve $A(\widehat{CDK}) = 9\sqrt{3}$ birimkare olarak veriliyor.

Buna göre düzgün altıgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

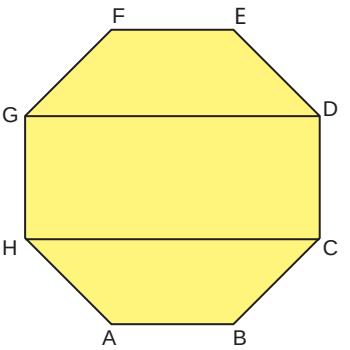
8.



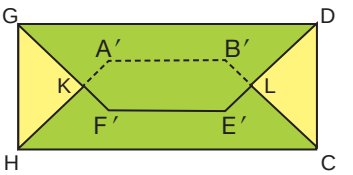
Yandaki şekilde ABCDEF düzgün altıgen, K altıgenin dışında bir nokta, $m(\widehat{BCK}) = 30°$, $|CK| = 12$ birim ve $|KF| = 20$ birim olarak veriliyor.

Buna göre Ç(ABCDEF) nin kaç birim olduğunu bulunuz.

9. Şekil 1'deki ön yüzü sarı, arka yüzü yeşil renkli olan düzgün sekizgen biçimindeki kâğıt üstten [GD] boyunca, alttan ise [HC] boyunca katlandığında A, B, E ve F noktaları sırasıyla A′, B′, E′ ve F′ noktalarına denk geliyor ve Şekil 2 elde ediliyor.



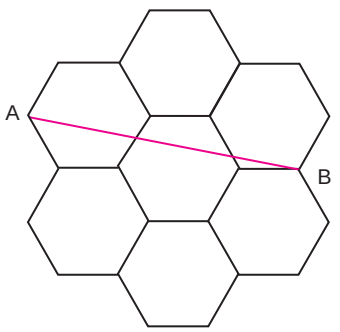
Şekil 1



Şekil 2

Düzgün sekizgenin bir kenar uzunluğu $4\sqrt{2}$ birim olduğuna göre üç katlı KF′E′LB′A′bölgesinin alanının kaç birimkare olduğunu hesaplayınız.

10.



Yandaki şekilde, bir kenar uzunluğu 2 birim olan düzgün altıgenlerden oluşan bir desen verilmiştir.

Buna göre A ve B köşe noktaları arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

2.5. ÇOKGENLERLE İLGİLİ PROBLEMLER

Konuya Başlarken

Selçuklu yıldızı, kökeni Karahanlı Devleti'ne kadar uzanan ancak daha çok Selçuklu Devleti tarafından kullanılan sekiz köşeli bir sembolik amblemdir. Bu yıldız, merkezleri aynı olan ve eşit büyüklükteki iki kareden birinin diğerine göre 45° döndürülmesiyle oluşturulmuştur. Selçuklu yıldızı, günümüz Türk kültüründe de önemli bir yere sahiptir. Mimari eserlerde, sanatta hatta para birimlerinde sıkça kullanılmıştır. Görsel 2.9'da Selçuklu yıldızı ve ona atfedilen anlamlar verilmiştir.



Görsel 2.9: *Selçuklu yıldızı ve anlamları*

Verilen bilgileri kullanarak ve görseli inceleyerek aşağıdaki soruların cevaplarına ilişkin fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. **Görsel 2.9'da hangi düzgün çokgenler kullanılmıştır?**

2. **Görsel 2.9'da karelerin köşe noktaları kullanılarak nasıl bir çokgen elde edilebilir?**

3. **Üstten bakıldığında Selçuklu yıldızı şeklinde görünen ve bu yıldızın kenarlarının yürüyüş yolları olarak tasarlandığı bir park inşa edilmek isteniyor. Bu parkın yeşil alanlarının alanını ve yürüyüş yollarının uzunluklarını bulma probleminin çözümü için nasıl bir strateji izlenmelidir?**

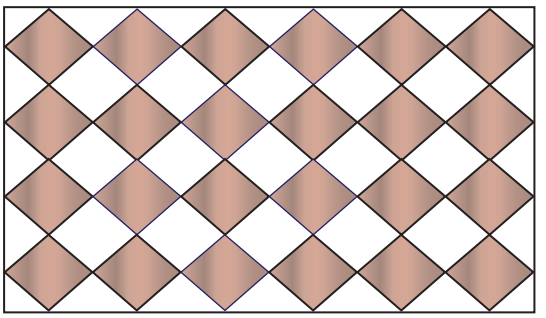
Çokgenler gerçek yaşamda çok önemli bir yere sahiptir. Bal peteği yapımında en az malzeme ile en çok yer kaplamak için kullanılabilecek en iyi şekil altıgendir. Benzer şekilde inşaat sektöründe de en verimli kullanım alanlarını oluşturmak için dışbükey çokgenlerden yararlanılır. Gerçek yaşam problemlerinde karşılaşılan dışbükey çokgenler, yapılan tasarımların kullanım alanlarının verimliliğinde ve süsleme sanatlarında stratejik bir yere sahiptir.

17. Uygulama

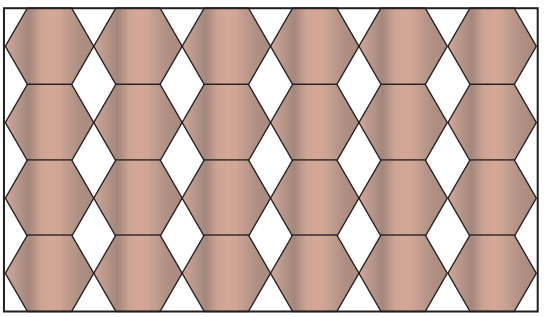
Çokgenlerle İlgili Problem Çözme-1

Aşağıda bulunan problem durumunu inceleyiniz ve istenenleri gerçekleştirerek soruları cevaplayınız.

Fayans ustası Hüseyin Bey, bir müşterisinin dikdörtgen şeklindeki mutfak zeminini fayansla kaplayacaktır. Müşterisi, Hüseyin Bey'e kullanacağı fayans modellerinin düzgün altıgen veya eşkenar dörtgen şeklinde olabileceğini ancak görüntünün bozulmaması adına bu fayanslarda herhangi bir kesme işlemi yapmaması gerektiğini söylemiştir. Bunun üzerine Hüseyin Bey mutfağın zemin ölçülerini aldıktan sonra aşağıdaki iki farklı modeli tasarlamış ve müşterisine sunmuştur. İki modelde de kullanılan fayans sayısı ve fayansların metrekare fiyatı aynı olup fayanslar dışında kalan boşluklar için ise metrekare fiyatı fayanslardan iki kat daha pahalı olan bir dolgu malzemesi kullanılacaktır (Her iki model için de Hüseyin Bey'in işçilik ücreti aynıdır.). Bu iki model arasında hangisinin maliyetinin daha uygun olacağını bulunuz.



Model 1 (Eşkenar dörtgen)



Model 2 (Düzgün altıgen)

1. Hüseyin Bey'in modelleri tasarlarken fayansları kesmeden zemine yerleştirebilmek için hangi verileri kullanması gerektiğini belirleyiniz.

2. Her iki model için maliyet hesaplarının nasıl yapılabileceğini belirleyiniz.

3. Bu iki modelden hangisinin daha ekonomik olduğunu bulabilmek için problemin matematiksel bileşenlerini ve bu bileşenler arasındaki ilişkileri problemin bağlamına uygun bir şekilde matematiksel olarak ifade ediniz.

4. Matematiksel olarak ifade ettiğiniz problemi düzgün çokgenlerin konumları, aralarında oluşturdukları açılar gibi verileri kullanarak kendi cümlelerinizle açıklayınız.

5. Kullanılan fayansların kaç metrekarelik bir alanı kapladığını ve dolgu işleminin kaç metrekarelik boş alana yapıldığını hesaplayabilmek için bir strateji geliştiriniz. Geliştirdiğiniz stratejiyi açıklayınız.

6. Geliştirdiğiniz stratejiyi sistematik şekilde uygulayarak problemi çözünüz. Çözümünüzde hangi geometrik kavramları nasıl ve neden kullandığınızı açıklayınız.

7. Çözümünüzü kontrol ederek arkadaşlarınızın çözüm yollarını ve stratejilerini eleştirel bir bakış açısıyla inceleyiniz. Kendi çözüm yolunuz ile arkadaşlarınızın çözüm yollarını ve stratejilerini karşılaştırınız. İncelediğiniz farklı stratejilerden varsa çözüme ulaşmayanları belirtiniz. Bu stratejilerle çözüme ulaşamamanızın nedenlerine ilişkin fikirlerinizi açıklayıp sınıf arkadaşlarınızla saygı ve nezaket kuralları çerçevesinde tartışınız, çözüme ulaştırmayan stratejilerinizi değiştiriniz.

8. Çözüme ulaşmanızı sağlayan stratejilerin başka hangi tür problemlerin çözümünde kullanılabileceğine ilişkin çıkarımlarınızı gerekçeleriyle açıklayınız.

9. Farklı stratejilerle ilgili çıkarımlarınızın geçerliliğini ve problemin çözüm stratejisine ilişkin gerekçeli yargılarınızı matematiksel örneklerle değerlendirmek amacıyla aşağıdaki örnek problem durumunu inceleyiniz. Çözüm adımlarınızı sistematik şekilde ve kararlılıkla uygulayarak probleme ilişkin soruları cevaplayınız.

Problem

Uzun kenar uzunluğu kısa kenar uzunluğunun $\sqrt{3}$ katı ve alanı $192\sqrt{3}$ birimkare olan dikdörtgen şeklindeki bir zemin, Model 2'deki gibi düzgün altıgen şeklindeki fayanslarla kaplanmak isteniyor. Fayansın adet fiyatı 300 TL olduğuna göre işçilik fiyatı hariç zeminin kaplanmasının maliyetinin kaç TL olduğunu hesaplayınız.

10. Kullandığınız çözüm stratejisinin, farklı geometrik şekiller (örneğin eşkenar üçgen, düzgün beşgen, düzgün sekizgen tabanlı tasarımlar) içeren problemlere nasıl uyarlanabileceğine ilişkin çıkarımlar yapınız.

Problem



Kümbetler, Selçuklu Hanedanlığı zamanında Anadolu'da yapılmış anıt mezarlardır ve Türk mimarisinin özgün örnekleri arasındadır. Bu yapıların en belirgin özellikleri genellikle tuğla veya taştan yapılmış kare bir zemin üzerine yapılan, silindirik veya çok köşeli bir gövde ile koni şeklindeki çatılarıdır. Yandaki görselde Kayseri'de bulunan Çifte Kümbet verilmiştir. Çifte Kümbet, kare bir zemin üzerine oturtulmuş düzgün sekizgen bir yapı şeklinde inşa edilmiştir.

Buna göre kümbetin tabanının oturtulduğu karenin bir kenar uzunluğu 4 metre ise tabanı düzgün sekizgen biçiminde yapılabilecek en büyük kümbetin tabanının modelini oluşturunuz ve alanının kaç metrekare olduğunu bulunuz.

11. 10. maddedeki problemin çözümü için verilen bilgilerin çözüm stratejinizi değiştirip değiştirmeyeceğine ilişkin fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız ve çıkarımlarınızın geçerliliğini değerlendiriniz.

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

18. Örnek

Genellikle cami avlularının ortasında bulunan, çevresindeki musluklardan ve ortasındaki fıskiyeden su akan üzeri kubbeli abdest alma yerine **şadırvan** adı verilmektedir. Şadırvan sözcüğü akıcı çok su manasındaki "Şadâb-ı Revân" dan gelmektedir. Görsel 1'de sekizgen şeklindeki Ramazanoğlu Camii Şadırvanı (Adana), Görsel 2'de altıgen şeklindeki Kapu Camii Şadırvanı (Konya), Görsel 3'te onikigen şeklindeki Ali Paşa Şadırvanı (İzmir) verilmiştir.



Görsel 1



Görsel 2



Görsel 3

Yeni yapılan bir caminin avlusuna yukarıda verilen görsellerdeki gibi şadırvan yaptırmak isteyen bir hayırsever, mimarla anlaşarak mimardan yaptıracağı şadırvanın projesini çizmesini istemiştir. Mimar aşağıdaki koşulları dikkate alarak bir çizim yapacaktır.

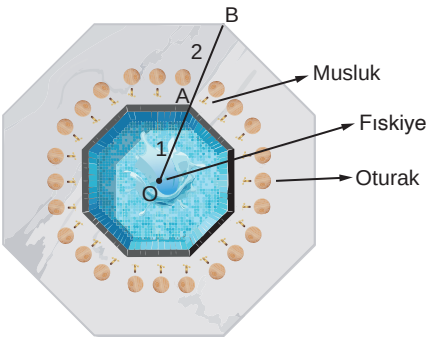
- Şadırvanın oturtulduğu zemin, her bir iç açısının ölçüsü 135° olan düzgün çokgenden oluşacaktır.
- Muslukların bulunduğu bölümün duvarları, zemini oluşturan çokgenin kenarları ile paralel olacak şekilde belli oranda küçültülerek yapılacaktır.
- İç bölümde yer alan çokgenin her bir duvarına üç musluk ve her bir musluk için bir oturak yapılacaktır.
- Şadırvanın üstten görünümü modellendiğinde oluşan çokgenlerin merkezinde fıskiye bulunacaktır. Fıskiyenin içte bulunan çokgenin bir köşesine uzaklığı 1 metre, dışta bulunan çokgenin bir köşesine uzaklığı 3 metre olacaktır.

Verilen bilgilere göre şadırvanın zemininin üstten görünümünü modelleyen şeklin pergel, cetvel, ölçüsüz cetvel veya matematik yazılımı yardımıyla taslak bir çizimini oluşturunuz. Oluşturduğunuz çizim yardımıyla aşağıdaki soruları cevaplayınız.

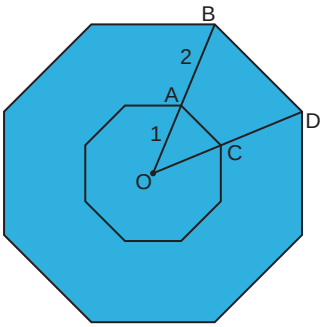
1. Çizdiğiniz şekilde dışta oluşan çokgenin alanının içte oluşan çokgenin alanının kaç katı olduğunu bulunuz.
2. Çizdiğiniz şekilde kaç tane simetri ekseni olduğunu bulunuz.
3. Şadırvanda kullanılacak olan her bir musluğun maliyeti 150 TL, her bir oturağın maliyeti 300 TL olduğuna göre musluk ve oturak için harcanacak toplam paranın kaç TL olduğunu bulunuz.

Çözüm

1. Şadırvanın üstten görünümü, Şekil 1'deki gibi modellenmiştir. Şekil 2'de şadırvanın modellenmesinde kullanılan üçgen kesit verilmiştir.



Şekil 1



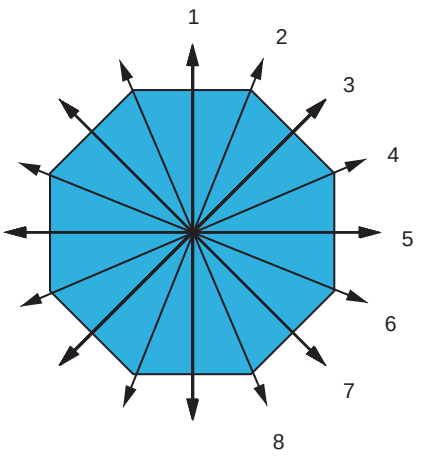
Şekil 2

Benzer üçgenlerin alanları oranı sekizgenlerin alanları oranına eşit olacağından

$$\frac{\text{Büyük sekizgenin alanı}}{\text{Küçük sekizgenin alanı}} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = 9 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla dıştaki sekizgenin alanı içteki sekizgenin alanının 9 katıdır.

2. Verilen şeklin kenarlarının orta noktalarından ve köşelerinden doğrular çizildiğinde aşağıdaki gibi 8 tane simetri ekseni oluşur.



3. Yapılan modellemede şadırvanın 8 kenarı ve her kenarına ait 3 musluk ile 3 oturak olduğu için şadırvanda toplam 24 tane musluk ve 24 tane de oturak vardır.

Muslukların maliyeti 150 TL olduğundan musluklara ödenen toplam para
$24 \cdot 150 = 3600$ TL olur.
Bir oturağın maliyeti 300 TL olduğundan oturaklara ödenen toplam para
$24 \cdot 300 = 7200$ TL olur.

Bu durumda toplam ödenen para $7200 + 3600 = 10\,800$ TL olur.

19. Örnek

Babaanne battaniyeleri (Görsel 1), kullanılmayan ipleri değerlendirmek amacıyla örülen bir battaniye türüdür.



Görsel 1

Gül Hanım Görsel 2'de bir kısmı verilen düzgün beşgen şeklindeki motifleri örüp birleştirerek torunları için yapacağı battaniyenin üzerine süs olarak kullanacaktır.



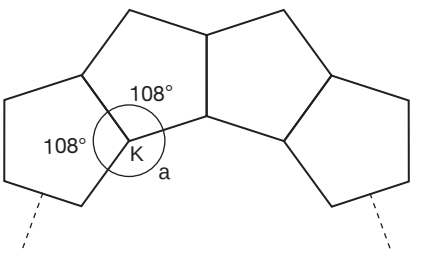
Görsel 2

Buna göre

1. Motifi oluşturan düzgün beşgenler tamamlanıp şekil kapalı hâle getirildiğinde motifin iç kısmında oluşacak şeklin kaç kenarlı bir çokgen olduğunu bulunuz.
2. Motifin iç kısımda oluşan çokgenin en uzun köşegen uzunluğu 40 cm olduğuna göre bu çokgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz. $(\sin 36^\circ \approx 0,58)$

Çözüm

1. Yanda motiflerin birleşimini gösteren bir model verilmiştir. Bu modelde ortada oluşacak çokgenin bir köşesi K noktası ile belirtilmiştir. Her bir motif düzgün beşgen olduğundan, düzgün beşgenin tüm kenarları eşit uzunluktadır ve her bir iç açısının ölçüsü 108° dir. Bu durumda ortada oluşacak şekil de düzgün çokgendir. K köşesindeki açıların ölçüleri toplamı 360° olduğundan



$$108^\circ + 108^\circ + a = 360^\circ$$
$$a = 360^\circ - 216^\circ$$
$$a = 144^\circ \text{ olarak bulunur.}$$

n kenarlı düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$ dir.

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = 144^\circ$$
$$180^\circ \cdot n - 360^\circ = 144^\circ \cdot n$$
$$36^\circ \cdot n = 360^\circ$$
$$n = 10 \text{ olarak bulunur. Bu durumda orta kısmında düzgün ongen oluşacaktır.}$$

2. En uzun köşegeninin uzunluğu 40 cm olduğundan çokgenin simetri merkezinin köşelere uzaklığı 20 cm'dir. Simetri merkezi köşelerle birleştirilirse kenar uzunlukları 20 cm ve tepe açısının ölçüsü 36° olan 10 adet ikizkenar üçgen oluşur. Bu üçgenlerin alanları toplamı düzgün ongenin alanına eşit olacaktır.

$$\text{Çokgenin Alanı} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \cdot \sin 36^\circ$$
$$= 10 \cdot 200 \cdot 0{,}58 = 1160 \text{ cm}^2 \text{ olarak bulunur.}$$

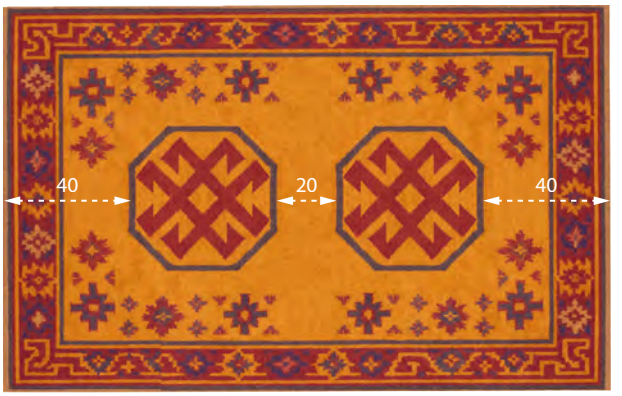
20. Örnek

Türk kültüründe kilim motifleri ve anlamları nesilden nesile aktarılarak günümüze kadar gelmiştir. Binlerce yıllık bir geçmişe sahip olan bu desen ve motifler bulundukları topluma ait inanç ve kültürün bir ifadesidir. Bu motiflerin özel anlamları ve isimleri vardır. Elibelinde, koçboynuzu, akrep, suyolu ve pıtrak bu motiflerden bazılarıdır.

Kadriye Hanım, boyutları 150 × 200 cm olan bir kilim dokumak istemektedir. Kilimde, Görsel 1'deki akrep motifi, iki adet eş düzgün sekizgen içerisine yerleştirilmiştir (Görsel 2). Sekizgenlerin aralarındaki mesafe 20 cm, kilimin kısa kenarlarına olan uzaklıkları ise 40 cm'dir.



Görsel 1



Görsel 2

Sekizgen şekillerin kilimin uzun kenarlarına uzaklıkları eşit olduğuna göre bu uzaklığın kaç santimetre olduğunu bulunuz.

Çözüm

Akrep motifinin yer aldığı düzgün sekizgenlerin paralel olan kenarları arasındaki uzaklık a cm, sekizgenlerin halının uzun kenarlarına olan uzaklığı b cm olsun. Kilimde uzun kenarın uzunluğu 200 cm olduğundan

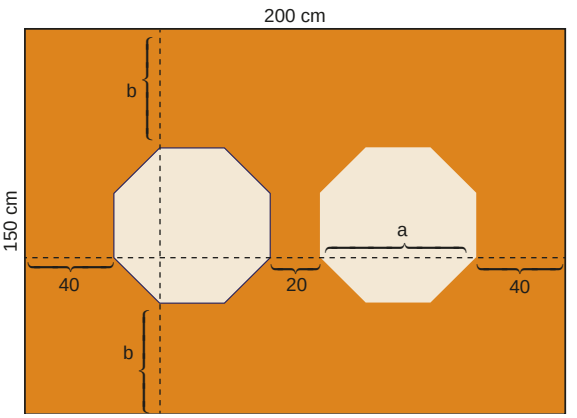
$2a + 100 = 200$ ise

$a = 50$ cm bulunur.

Kilimde kısa kenarın uzunluğu 150 cm olduğundan

$2b + 50 = 150$ ise

$b = 50$ cm olarak bulunur.



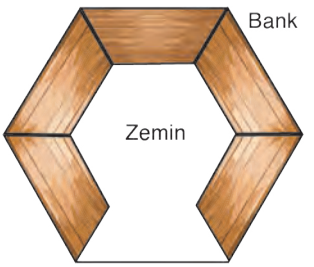
Sıra Sizde 16

Genellikle bahçelerde, parklarda veya özel mülklerde kullanılan üst tarafı kapalı ahşap, metal veya plastik malzemeden yapılan yapılara "kameriye" adı verilir. Kameriyeler kare, dikdörtgen, altıgen veya sekizgen şeklinde olabilir. Görsel 1'de düzgün altıgen şeklinde bir kameriye verilmiştir.

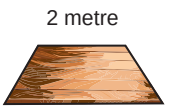


Görsel 1

Görsel 1'de verilen düzgün altıgen şeklinde bir kameriyenin kullanım alanının üstten görüntüsü Görsel 2'de verilmiştir. Kameriyenin oturma alanı için tasarlanan banklar Görsel 3'teki ikizkenar yamuklardan 5 tanesinin birleştirilmesiyle elde edilmektedir.



Görsel 2



Görsel 3

Buna göre

1. **İkizkenar yamukların taban açılarının ölçülerinin kaç derece olduğunu bulunuz.**

2. **Görsel 2'de birbirine en uzak iki nokta arasındaki uzaklığın kaç metre olduğunu bulunuz.**

3. **Görsel 2'de simetri eksenlerinin kesiştiği noktanın banklara en kısa uzaklığının kaç metre olduğunu bulunuz.**

4. **Şekilde banklar dışında kalan kısımlar karo taşları ile kaplanacaktır. Karo taşı ile kaplanacak bölgenin alanının kaç metrekare olduğunu bulunuz.**

Performans Görevi

Adı: Çokgenler ve Dörtgenlere Dair Sınıflandırma, Yapılandırma ve Çıkarımlarla İlgili Farklı Problem Durumları

Beklenen Performans: Çokgenler ve dörtgenlere dair sınıflandırma, yapılandırma ve çıkarımlara ilişkin bilgi ve becerilerle ilgili farklı problem durumlarını araştırıp araştırma sonucunu hazırlayarak sunum yapma

Görev: Bu görevde çokgenler ve dörtgenlere dair sınıflandırma, yapılandırma ve çıkarımlara ilişkin bilgi ve becerilerle ilgili farklı problem durumlarını araştırarak bir sunum hazırlamanız istenmektedir.

Yönerge:

Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Yapılacak işleri ve çalışma takviminizi içeren bir çalışma planı oluşturunuz.
- Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz.
- Çalışmanızı öğretmeninizin belirlediği sürede tamamlayınız.

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Çokgenler ve dörtgenlerle doğada nerelerde karşılaşılabileceğine dair araştırma yapınız.
- Araştırmanızın sonucunda çokgenler ve dörtgenlerle ilgili iki tane problem oluşturunuz.
- Oluşturduğunuz problemlerden bir tanesinin çokgenler ve dörtgenlerle ilgili kavramlar kullanarak oluşturulan bir yapının tasarım örneği olmasına dikkat ediniz.
- Oluşturduğunuz problemin çözümünü bulunuz.
- Tasarımınızı görsel olarak destekleyecek bir ürün (yapının taslak planını içeren afiş veya poster, yapının maketi vb.) oluşturunuz.
- Çalışmanız için bir sunum hazırlayınız.

Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Oluşturduğunuz sunuyu sınıfınızda arkadaşlarınızla paylaşınız.
- Tamamladığınız çalışmayı öğretmeninize teslim ediniz.

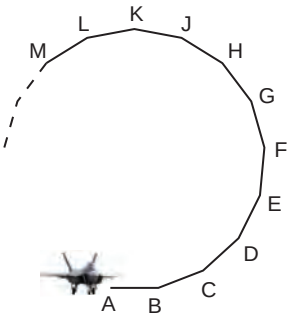
Değerlendirme: Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Ek soruların yer aldığı 5. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Farklı disiplinlere ait sorular)

Alıştırmalar

Türk Havacılık Uzay Sanayii tarafından yürütülen Türkiye'nin en önemli teknoloji projelerinden biri olan millî muharip uçağı KAAN'dır. Bu uçak geliştirme çalışmaları sırasında yapılan test uçuşlarında Karadeniz semalarında görseldeki gibi A noktasına geldikten sonra bu noktadan harekete başlayarak düzgün çokgen olacak şekilde kodlanmış olan ABCDEFGHJKLM… rotasını sabit hızla takip edecektir. KAAN'ın ikinci kez F noktasına gelmesi 10 dakika, üçüncü kez F noktasına gelmesi ise 18 dakika sürmüştür.



Verilen görsel ve bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. **KAAN'ın kodlanmış rotasının kaç kenarlı olduğunu bulunuz.**

2. **KAAN'ın kodlanmış rotasının oluşturduğu düzgün çokgenin kaç tane simetri ekseni olduğunu bulunuz.**

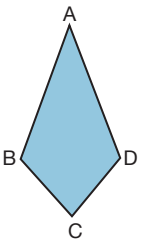
3. **KAAN; görseldeki rotasını değiştirerek A noktasından F noktasına ve oradan K noktasına doğrusal bir şekilde ilerlediğinde, izlediği bu iki yol arasında oluşan küçük açının ölçüsünün kaç derece olacağını bulunuz.**

2. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

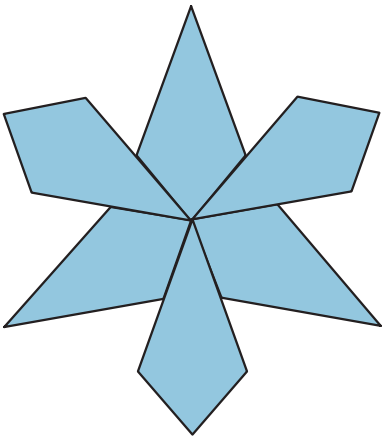
Aşağıda cevaplamanız için temaya ait farklı türlerde 13 adet soru bulunmaktadır.

1-9. bilgi ve becerileri ölçen soruları cevaplayınız.

1.



Şekil 1



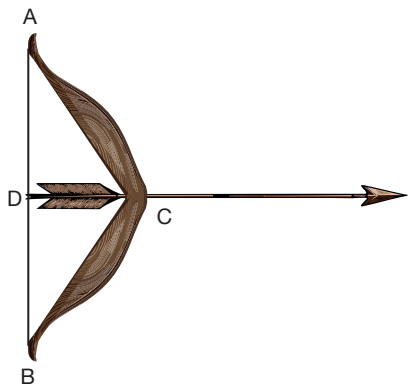
Şekil 2

Şekil 1'deki deltoid şeklindeki kartonlardan 6 tanesi aralarında boşluk kalmayacak ve üst üste gelmeyecek biçimde Şekil 2'deki gibi birleştiriliyor.

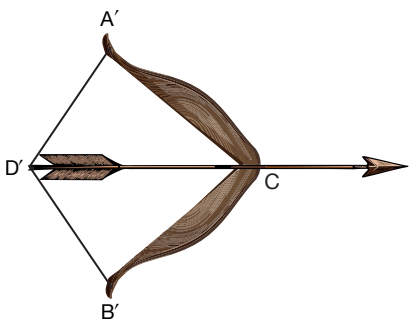
Buna göre $m(\widehat{ABC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

2. Şekil 1'de iç kısmı ikizkenar üçgen biçiminde olan bir yay görülmektedir. Yayın üzerindeki A ve B noktalarına bağlı, 80 cm uzunluğunda doğrusal bir ip bulunmaktadır. Ayrıca, AB ipine dik olacak şekilde D noktasında sabitlenmiş bir ok yer almaktadır. Şekil 1'deki okun ip ile yay arasında kalan DC uzunluğu 30 cm'dir.

Ok yönü ve doğrultusu değiştirilmeden D noktasından tutulup çekilerek Şekil 2'deki konum elde edilmektedir. Ok çekildiğinde, yayın üzerindeki A ve B noktalarının konumu sırasıyla A′ ve B′ olmakta ve bu iki nokta arasındaki mesafe 60 cm'ye düşmektedir.



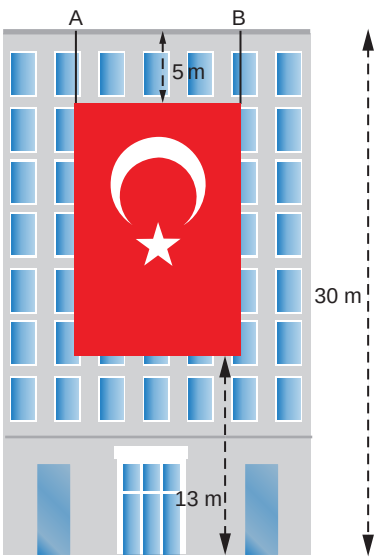
Şekil 1



Şekil 2

Buna göre okun ilk konumuna göre kaç cm çekildiğini bulunuz.

3. 14-20 Nisan Şehitler Haftası sebebiyle yüksekliği 30 metre olan bir binanın ön ve arka cephesine iki özdeş bayrak, eşit uzunlukta ipler kullanılarak iki farklı biçimde asılıyor (Görsel 1 ve Görsel 2). Görsel 1'de düz bir zemin üzerine konumlandırılan A ve B noktaları bayrağın uzun kenarlarıyla aynı doğrultuda olup zeminden yüksekliği 13 metre, apartmanın üst noktasının bayrağa olan uzaklığı 5 metre ve Görsel 2'de $|KL| = 16$ metre, bayrağın zeminden yüksekliği 15 metredir. Her iki durumda da bayrağın kısa kenarları zemin ile paralel konumludur.



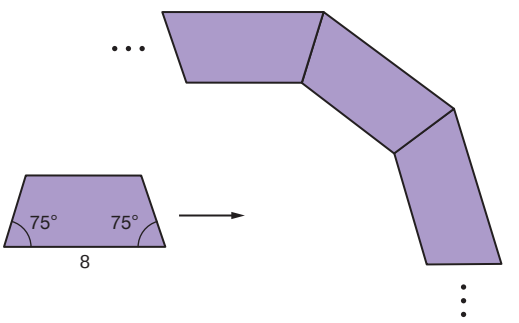
Görsel 1: *Binanın ön cephesi*



Görsel 2: *Binanın arka cephesi*

Buna göre asılan bayrağın kapladığı alanın kaç metrekare olduğunu bulunuz.

4 . Şekil 1'de taban açılarının ölçüsü 75°, alt taban uzunluğu ise 8 birim olan eş ikizkenar yamuklar verilmiştir. Bu yamuklar, yan kenarları arasında boşluk kalmayacak ve üst üste gelmeyecek şekilde yan yana getirilerek Şekil 2'de bir kısmı verilen düzgün çokgen oluşturulacaktır.



Şekil 1 **Şekil 2**

Buna göre yamukların birleştirilmesiyle oluşacak çokgenin dış çevre uzunluğunun kaç birim olacağını bulunuz.

5.



Hasan, Ekrem, Selami, Arif ve Barış isimli beş arkadaş yaz tatilinde bir haftalık çadır kampı yapmayı planlamışlardır. Bunun için yanda verilen görseldeki gibi ön ve arka yüzü ikizkenar üçgen, zemini ve yan yüzleri dikdörtgen olan bir çadır, çadırın zeminine sermek için beş tane 180 x 50 cm ebatlarında kamp matı ve diğer gerekli malzemeleri satın almışlardır.

Çadırı kurduktan sonra Hasan, Ekrem, Selami, Arif ve Barış arasında aşağıdaki konuşmalar geçmiştir.

Hasan: Çadır zemininin dört tane simetri ekseni vardır.

Ekrem: Çadırın yüksekliği bilinirse çadırın yan yüzlerinin alanı bulunabilir.

Selami: Matlar, çadırın zemininde boşluk kalmayacak şekilde yan yana yerleştirilirse zeminin alanı 4,5 metrekare olur.

Arif: Çadırın yan yüzlerinin kısa kenarının uzunluğu bilinirse zeminin kısa kenar uzunluğu da bulunabilir.

Barış: Çadırın yan yüzünün uzun kenarının uzunluğu ile zeminin uzun kenarının uzunluğu bilinirse çadırın yüksekliği bulunabilir.

Buna göre Hasan, Ekrem, Selami, Arif ve Barış'ın söylediklerinden hangilerinin kesinlikle doğru olduğunu bulunuz.

6. İzleme mesafesi, televizyonun ekran boyutunu seçerken dikkate alınması gereken önemli bir faktördür. Satın alınacak bir televizyonun ekran boyutu belirlenirken odanın büyüklüğü, oturma düzeni ve izleme mesafesi dikkate alınmalıdır. Televizyonun kaç ekran olduğu, şekildeki gibi kırmızı çizgiyle gösterilen köşegen uzunluğunun santimetre cinsinden ölçülmesi ile bulunur.



Aşağıdaki tabloda bazı televizyon ekranlarının boyutları ve uygun izleme mesafeleri verilmiştir.

Ekran boyutu (cm)	55	66	81	94	101	106	117	132	152
İzleme mesafesi (cm)	100	120	150	175	200	220	245	290	330

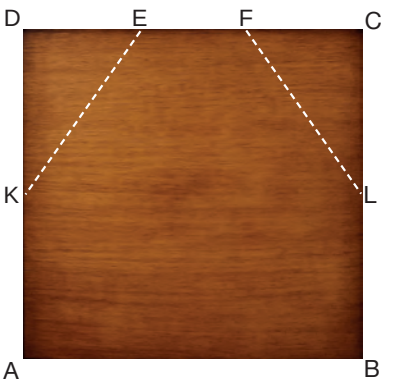
Betül Hanım, televizyon konulacak odasının izleme mesafesinin 245 cm ve alacağı dikdörtgen şeklindeki televizyonun ekran çevre uzunluğunun 322 cm olduğunu bildiğine göre televizyon ekranının kapladığı alanın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

7. Aşağıda görseli verilen müzik aleti, klasik Türk müziği çalgılardan biri olan "santur" dur. Kanuna benzerliğiyle bilinen santur, ikizkenar yamuk şeklindedir. Ancak kanun gibi kucağa alınmaz, bir sehpaya konulur ve tellerine iki küçük tokmakla vurularak çalınır.



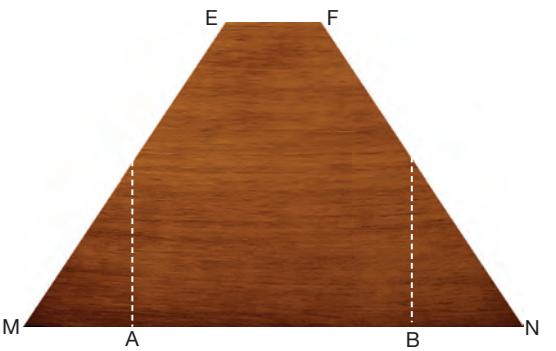
Görsel

Şekil 1'de santur yapabilmek için ceviz ağacından alınmış ABCD karesi şeklindeki tahta parçası verilmiştir.



Şekil 1

E, F, K ve L karenin kenarları üzerindeki noktalar olmak üzere tahta parçası $[EK]$ ve $[FL]$ boyunca kesilip AK ile DK ve BL ile CL çakışacak biçimde Şekil 2'deki gibi yapıştırılarak ikizkenar yamuk şeklindeki santurun bir parçası elde ediliyor.



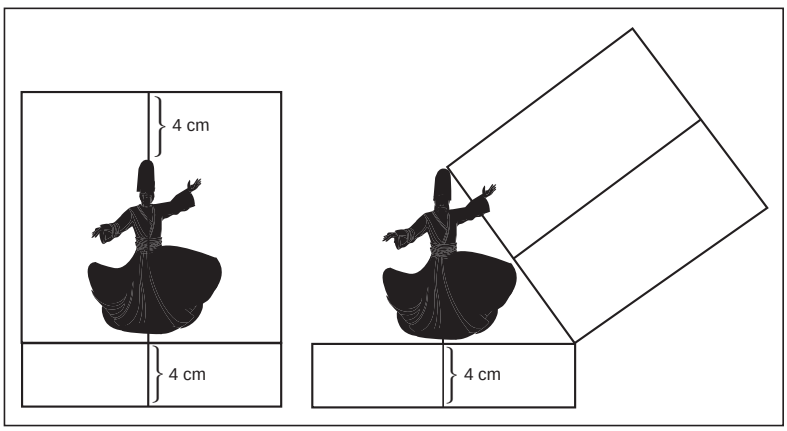
Şekil 2

$|EF| = 2$ birim, $|ME| = 10$ birim ve M, A, B, N doğrusal olduğuna göre A(ABCD) nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

8. Aşağıdaki görselde, merkezinde bir semazenin yer aldığı düzgün altıgen şeklinde zemini bulunan bir müzik kutusu verilmiştir. Ahşap zemin üzerine oturtulan cam fanus şeklindeki kapak, zemine bir kenarından menteşe ile bağlanmıştır. Kapalı durumdaki müzik kutusunda ahşap zeminin yerden yüksekliği ile semazenin külahı ve cam fanusun üst bölgesinin merkez noktası arasındaki en kısa mesafe eşittir ve 4 santimetredir.



Müzik kutusunun cam fanus şeklindeki kapağı açıldığında tasavvuf müziği çalmaya başlamakta ve kutunun içindeki semazen kendi etrafında dönmektedir. Müzik kutusunun kapalı hâlinin görüntüsü ile kutunun kapağı açılırken kapağın semazenin külahına teğet geçtiği andaki görüntüsünün iki boyutlu modeli aşağıdaki şekillerde sırasıyla verilmiştir.



Buna göre

a) Cam kapağın semazenin külahını teğet geçtiği anda ahşap zemin ile kapak arasında oluşan dar açının ölçüsünü bulunuz.

b) Zeminde bulunan düzgün altıgenin bir kenar uzunluğunun 12 santimetre olduğu kabul edilirse müzik kutusunun yüksekliğinin kaç santimetre olacağını bulunuz.

9. Günlük hayatta üretilen plastiklerin çoğunun ham maddesi petrol ve kömür gibi fosil yakıtlardır. Üretim ve kullanımı diğer fosil yakıtlara göre daha kolay olduğu için petrolden poşet üretilmesi petrole olan talebi artırmaktadır. Bu durum daha çok petrolün işlenmesine yol açmakta dolayısıyla petrolün işlenmesi ve yakılması esnasında doğaya salınan zehirli gazlar çevre kirliliğine neden olmaktadır.

Doğada yok olması çok uzun yıllar alan plastik atıklar, bu süreçte besin zincirine karışarak toprak ve suyu kirletir; çevreye verdikleri olumsuz etkiler nedeniyle ekosistemin dengesini bozar.

Bu nedenle insanların plastikleri kullanırken bilinçli davranması ve kullanımını mümkün olduğunca azaltması büyük önem taşımaktadır.



Şekil 1

Bu sebeple alışverişlerinde plastik poşet kullanımını azaltmak isteyen İpek, evde bulunan eski kumaş parçalarını değerlendirerek kendisine sürekli kullanabileceği dikdörtgen şeklinde bir bez çanta yapıyor (Şekil 1).



Şekil 2



Şekil 3

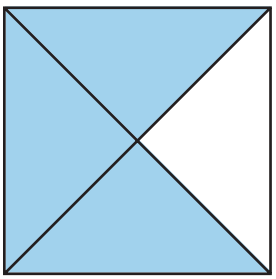
Daha sonra çanta ile aynı boyda olan kare şeklindeki kırmızı bir kumaş parçasını Şekil 2'deki gibi kesiyor.

Alanı 400 cm^2 olan kare şeklindeki kırmızı kumaşın köşelerinden bir kenar uzunluğu a cm olan ikizkenar dik üçgenler kesilerek bez çantanın üzerine Şekil 3'teki gibi süslemeler yapılıyor.

Tasarlanan çantanın ortasına yerleştirilen düzgün sekizgenin çevre uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

10-13. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

10. En uzun köşegen uzunluğu a birim olan n kenarlı bir düzgün çokgenin n tane eş bölmeye ayrılmasıyla oluşan parçalardan x tanesinin alanı $\mathbf{n}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}}$ şeklinde ifade edilmektedir.



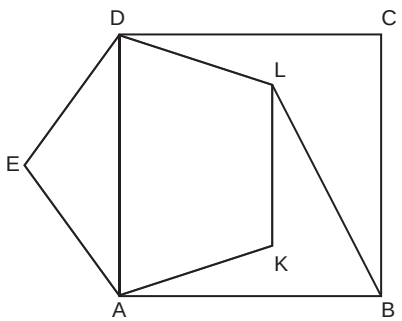
Şekil 1

Örneğin Şekil 1'deki mavi boyalı alanların toplamı $4\frac{3}{8} = 3 \cdot 8 = 24$ birimkaredir.

Buna göre $8\frac{3}{4} + 12\frac{4}{6}$ ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 72
B) 36
C) $9\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$
D) $9\sqrt{2} + 3$
E) $3\sqrt{2} + 9$

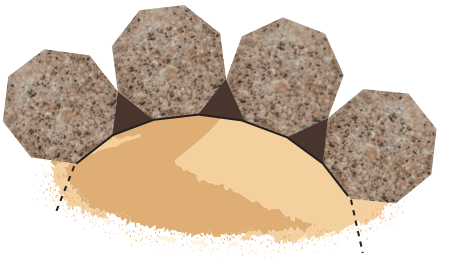
11. Aşağıdaki şekilde ABCD karesi ve AKLDE düzgün beşgeni veriliyor.



Buna göre $m(\widehat{BLK})$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 36°
B) 30°
C) 27°
D) 24°
E) 18°

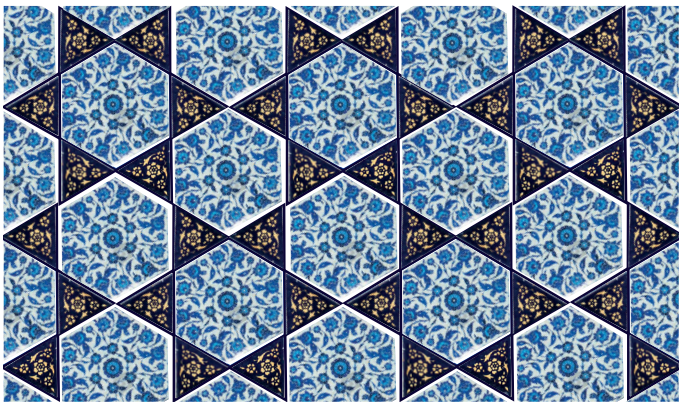
12. Yusuf Bey, evinin bahçesinde çocukları için bir kum oyun alanı oluşturmak amacıyla, kenar uzunlukları eşit olan eşkenar üçgen ve düzgün sekizgen biçiminde yeterli sayıda karo taşı temin etmiştir. Bu karo taşlarını belirli bir düzen içinde bir araya getirerek, dışbükey çokgensel bir bölge oluşturacak şekilde bir yapı inşa etmiştir.



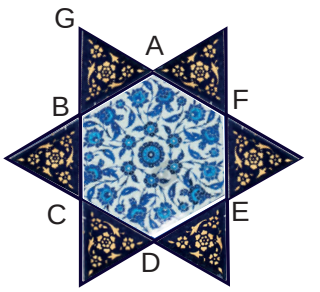
Buna göre oluşan düzgün çokgensel bölgenin kenar sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 30
B) 24
C) 20
D) 18
E) 15

13. Şekil 1'de eşkenar üçgen ve düzgün altıgenler kullanılarak elde edilmiş Topkapı Sarayı'na ait duvar süslemelerinden bir örnek, Şekil 2'de ise bu süslemede kullanılan motif modeli verilmiştir.



Şekil 1



Şekil 2

ABG eşkenar üçgeninin yüksekliği $4\sqrt{3}$ cm olduğuna göre ABCDEF çokgeninin alanının cm^2 cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $96\sqrt{3}$
B) $92\sqrt{3}$
C) $88\sqrt{3}$
D) $84\sqrt{3}$
E) $80\sqrt{3}$

Tema ile ilgili daha fazla soruya yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

3. TEMA

NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER (1)

3.1. **Trigonometrik Fonksiyonlar Ve Nitel Özellikleri**

3.2. **Trigonometrik Fonksiyonlarla İfade Edilebilen Denklemler İçeren Problemler**

Anahtar Kavramlar

- artanlık-azalanlık
- birim çember
- derece
- esas ölçü
- maksimum-minimum değer
- maksimum-minimum nokta
- periyot
- radyan
- trigonometrik fonksiyon
- yönlü açı

Sembol ve Gösterimler

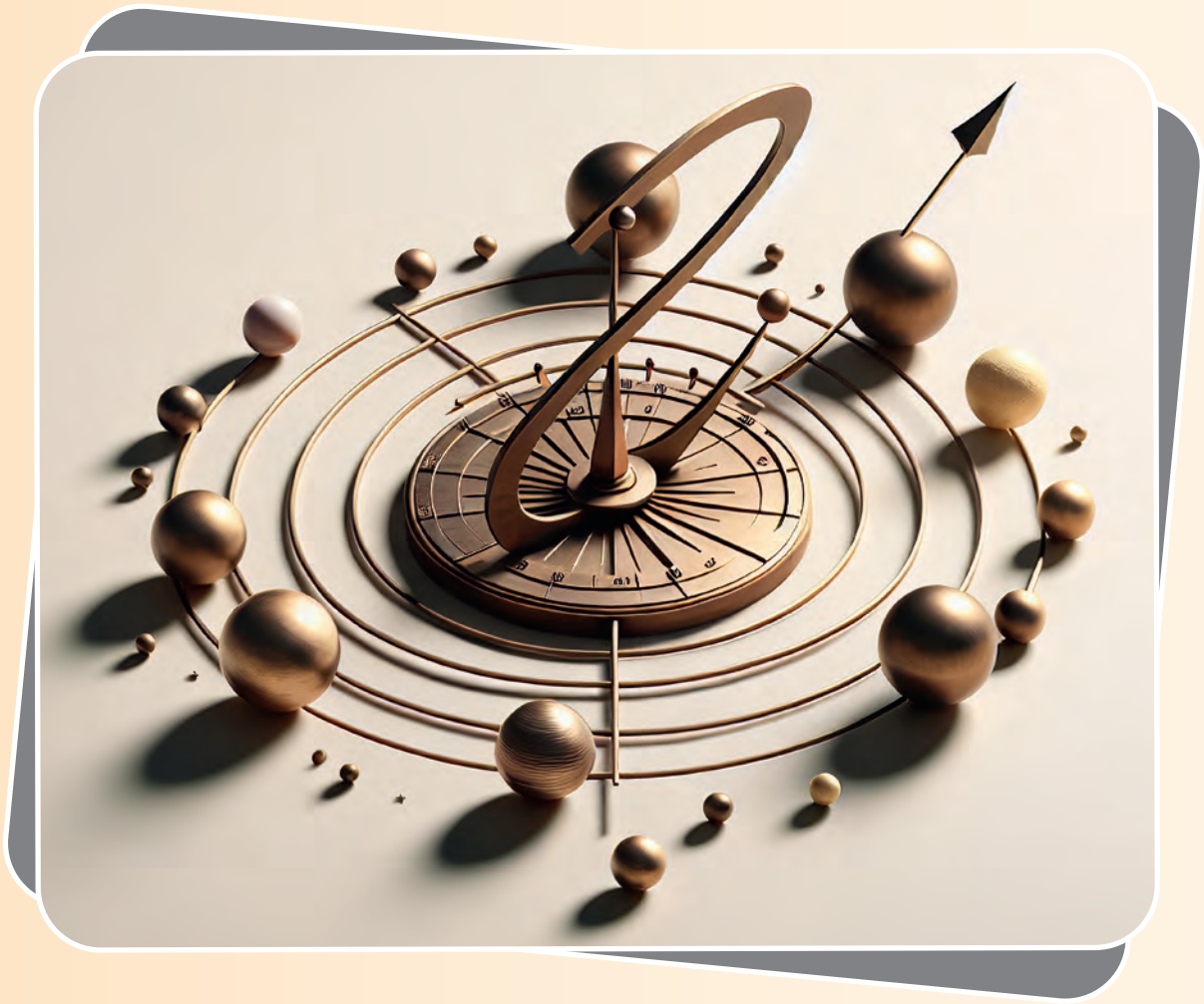
- 2π
- 360°
- $\cos x$
- $\cot x$
- $\sin x$
- T
- $\tan x$

Bu temada sizden

- $f(x) = \sin x\,(x \in \mathbb{R})$, $f(x) = \cos x\,(x \in \mathbb{R})$, $f(x) = \tan x\left(x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$ ve $f(x) = \cot x\,(x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonların nitel özellikleri ile bu fonksiyonlardan türetilen $g(x) = k \cdot f(mx \pm r) \pm s\,(k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ trigonometrik fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilmeniz,
- trigonometrik fonksiyonlarla ifade edilebilen denklemleri içeren problemleri çözebilmeniz

beklenmektedir.

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, araştırma ödevi ve performans görevlerini yerine getirmeniz, ölçme ve değerlendirme sorularını cevaplamanız istenmektedir.



3. Tema karekodu

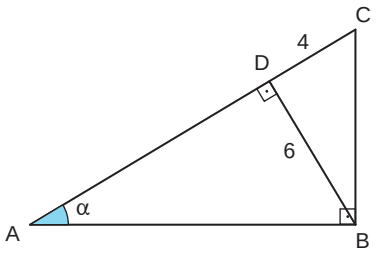
3. Tema Sunusu'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Başlarken

Trigonometri, üçgenlerin kenar uzunlukları ile açı ölçüleri arasındaki ilişkileri ortaya koyan bir matematik disiplinidir. Dik üçgenlerin iç açılarının ölçüleri ve kenar uzunlukları arasındaki matematiksel ilişki; tarih boyunca denizcilik, haritacılık ve astronomi gibi alanlarda karşılaşılan sorunları pratik şekilde çözmek için kullanılmıştır. Örneğin geçmişte denizciler, yıldızların konumlarını hesaplamak ve rotalarını belirlemek için trigonometrik hesaplamalara başvurmuşlardır. Aynı şekilde haritacılar, dağların yükseklikleri ve birbirine olan uzaklıklarını ölçmek için trigonometrik hesaplamalardan faydalanmışlardır.

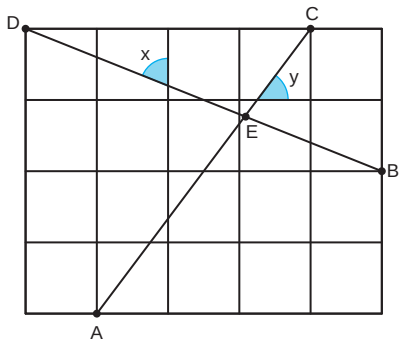
Ön Değerlendirme

1.



Yandaki ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [BC], [BD] \perp [AC]$;
A, D ve C noktaları doğrusal ve $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ dır.
$|BD| = 6$ **birim ve** $|DC| = 4$ **birim olduğuna göre** $\frac{1 - \cot\alpha}{\cos\alpha}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

2.

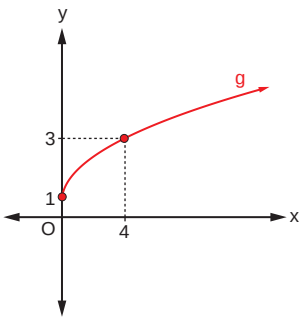


Yandaki şekil 20 eş birim kareden oluşmaktadır. $[BD]$ ve $[AC]$ şekildeki gibi birim karelerin kenarları ile yaptığı dar açıların ölçüleri derece türünden sırasıyla x ve y dir.

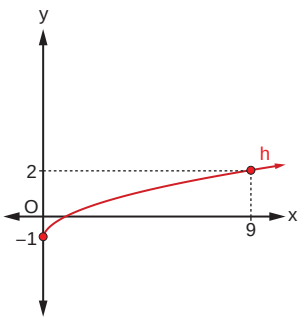
Buna göre $\frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ **ifadesinin sonucunu bulunuz.**

3. Aşağıda uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \sqrt{x}$ karekök referans fonksiyonundan türetilen fonksiyonların grafikleri bulunmaktadır.

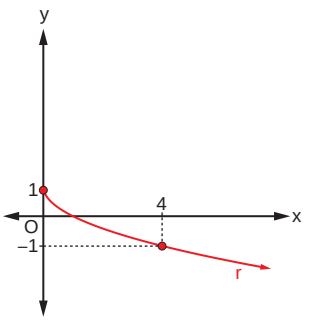
Buna göre g, h ve r fonksiyonlarının cebirsel temsillerini altlarına yazınız.



$g(x) =$



$h(x) =$

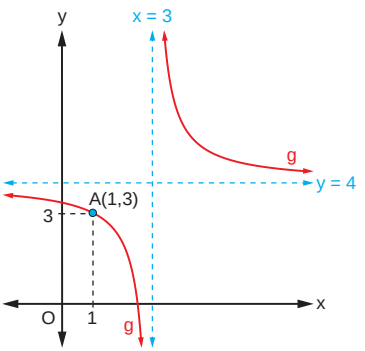


$r(x) =$

4. **Aşağıdaki tabloda verilen fonksiyonların nitel özelliklerini bularak ilgili boşlukları doldurunuz.**

Nitel Özellikler		$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 3x - 6$	$g: (-2, \infty) \to \mathbb{R}^+$ $g(x) = \sqrt{x+2}$	$h: \mathbb{R} \to [5, \infty)$ $h(x) = x^2 + 2x + 6$	$k: (-\infty, 6) \to \mathbb{R}$ $k(x) = \frac{1}{6-x} + 3$
Tanım Kümesi					
Görüntü Kümesi					
Bire Bir Olma Durumu					
Örten Olma Durumu					
Teklik-Çiftlik					
Maksimum Noktası ve Değeri					
Minimum Noktası ve Değeri					
Artanlık-Azalanlık					
Sıfırları					
İşareti	(+)				
	(−)				

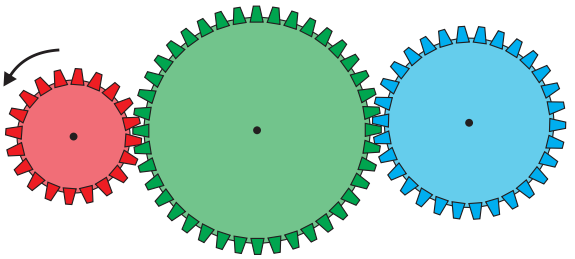
5.



$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlanan f rasyonel referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümler sonucunda oluşan $g(x) = \frac{a}{x+b} + c\,(a, b, c \in \mathbb{Z})$ fonksiyonunun grafiği, yandaki dik koordinat sisteminde verilmiştir.

Buna göre $a \cdot b - c$ ifadesinin değerini bulunuz.

6.

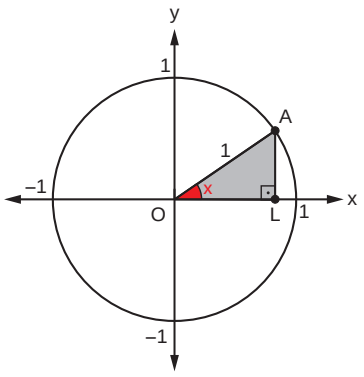


Yukarıda birbirini çeviren üç dişli çark gösterilmiştir. Soldaki çarkın yarıçapı 20 cm, ortadaki çarkın yarıçapı 40 cm, sağdaki çarkın yarıçapı 30 cm uzunluğundadır. Soldaki çarkın ok yönünde 120° dönmesi durumunda

a) Ortadaki çarkın pozitif ya da negatif yönde kaç derece döneceğini bulunuz.

b) Sağdaki çarkın pozitif ya da negatif yönde kaç derece döneceğini bulunuz.

7.



Yandaki şekilde dik koordinat ekseni üzerine yarıçapı 1 metre olan, O merkezli çember çizilmiştir.

OLA dik üçgeninde $m(\widehat{AOL}) = x$ ve $\tan x = \frac{3}{4}$ olarak verilmiştir.

OLA dik üçgeninin, O merkezi etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesiyle A′OL′ üçgeni elde ediliyor.

Buna göre A′ noktasının koordinatlarını bulunuz.

3.1. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

Konuya Başlarken

Matematikteki birçok konu gibi trigonometri de köklü ve evrensel bir içeriğe sahiptir. Bu içeriği keşfetmek; matematik problemlerini çözmenin yanı sıra doğanın ritmini, dalgaların hareketini ve müzikteki armoniyi kavramamıza yardımcı olur. Trigonometri hakkında geçmişten günümüze birçok bilim insanı çeşitli çalışmalar ortaya koymuştur. Bu bilim insanları arasında Bettani (Bettani) ve Ebülvefa Buzcani (Ebulvefa Buzcani) gösterilebilir. Bettani 9. yüzyılda yaşamış ünlü bir astronom, mühendis ve matematikçidir. Trigonometride sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarını bulup hesaplamalarda kullanan ilk bilim insanıdır. Bunun yanı sıra trigonometriye katkıları arasında trigonometri tablosunu oldukça hassas bir şekilde hazırlaması yer alır. Özellikle 0° ile 90° arasındaki açıların trigonometrik değerlerini hesaplayarak sonraki çalışmalarında kullanmıştır. Örneğin sıklıkla kullanılan 30° - 60° - 90° ya da 45° - 45° - 90° üçgenlerine ait trigonometrik oranların değerleri Tablo 3.1'de gösterilmiştir.

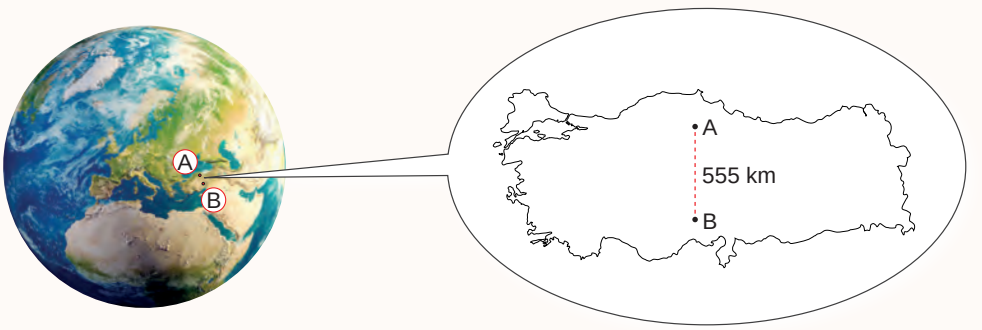
Tablo 3.1: *Trigonometrik Oranlar Tablosu*

	Sinüs	Kosinüs	Tanjant	Kotanjant	
0°	0	1	0	Tanımsız	90°
5°	0,087	0,996	0,087	11,430	85°
10°	0,173	0,984	0,176	5,671	80°
15°	0,258	0,965	0,267	3,732	75°
20°	0,342	0,939	0,364	2,747	70°
25°	0,422	0,906	0,466	2,144	65°
30°	0,500	0,866	0,577	1,732	60°
35°	0,573	0,819	0,700	1,428	55°
40°	0,642	0,766	0,839	1,191	50°
45°	0,707	0,707	1	1	45°
	Kosinüs	Sinüs	Kotanjant	Tanjant	

(Tablo okurken aynı renk satır ve sütunun kesişim yerine bakılır.)

Ebülvefa Buzcani, 10. yüzyılda yaşamış önemli bir matematikçi ve astronomdur. Sinüs ve kosinüs tablolarını doğru bir şekilde hazırlamış, trigonometrik özdeşliklerden bazılarını bularak bilim dünyasına kazandırmıştır. Tanjantı küresel trigonometride ilk defa sistematik olarak kullanmış ve küresel üçgenlerin çözümü için yeni metotlar geliştirmiştir. Sinüs değerlerinin hesaplanabilmesi için yeni bir metot geliştiren Ebülvefa Buzcani, hazırladığı cetvellerde 30 ve 15 dakikalık açının sinüsünün virgülden sonraki sekiz ondalık basamağını son derece hassas bir şekilde hesaplamıştır. Matematik tarihinde ilk defa ortaya koyduğu formüllerden bazıları günümüzde hâlâ aynı şekilde kullanılmaktadır.

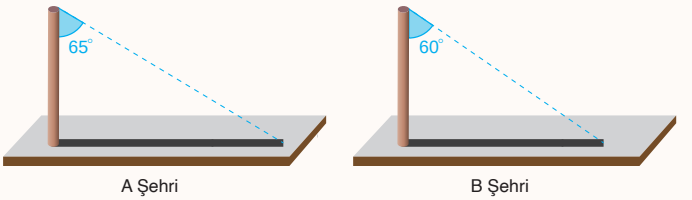
Eski çağlarda bilim insanları yıldızların ve gezegenlerin Dünya'dan ne kadar uzakta olduğunu ve gezegenlerin yarıçap uzunluklarını hesaplamaya çalışmışlardır. Örneğin Dünya'nın meridyen boyunca yarıçap uzunluğunun dik üçgende temel trigonometrik oranlar kullanılarak hesaplanmasında aynı boylam üzerinde bulunan Görsel 3.1'deki gibi iki nokta belirlenir. Bu noktalar A ve B şehirleri olarak adlandırılır. Aralarındaki kuş uçuşu mesafe 555 km olarak kabul edilir.



Görsel 3.1: *Türkiye'de aynı boylam üzerindeki A ve B şehirleri*

A ve B şehirlerinde öğle vakti (güneş tam tepedeyken) bir çubuğun gölge boyu ölçülür.

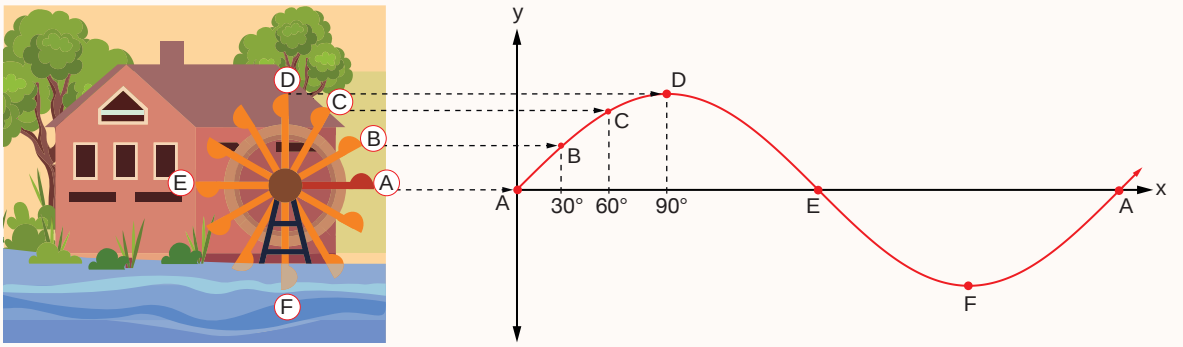
Güneş ışınları ile çubuk arasındaki dar açının tanjant değeri kullanılarak Görsel 3.2'deki gibi A şehrinin gölge açısının ölçüsü 65°, B şehrininki ise 60° olarak belirlenir. Dünya'nın meridyen boyunca çevre uzunluğunun yaklaşık değeri (Ç), merkez açı ölçüsü (θ, gölge açı ölçülerinin farkının mutlak değeri), şehirler arası mesafe (d) olmak üzere $\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{d}{Ç}$ eşitliği Dünya'nın çevresinin meridyen boyunca yaklaşık değerlerle hesaplanmasında kullanılır. Buradan Ç ≃ 39 960 km olarak bulunur. Dünya'nın yarıçap uzunluğu r olmak üzere Ç = 2πr olduğundan $r = \frac{39\,960}{2\pi} = \frac{19\,980}{\pi}$ ≃ 6359 km bulunur.



Görsel 3.2: *A ve B şehirlerindeki çubuklar ve çubukların gölgesi*

Bu örnek dışında bilimin gelişmesiyle birlikte yapılan hesaplamalar ve kullanılan aletler de gelişmiştir. Örneğin 15 ve 16. yüzyıllarda yaşamış olan ünlü Osmanlı denizcisi ve haritacısı Piri Reis, 1513 yılında dönemin teknolojisinden yararlanarak yaptığı çizimlerle Dünya haritası üzerine ilk çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu bu haritadaki doğruluk seviyesinin ve ayrıntıların döneminin çok ilerisinde olması, yaptığı çalışmanın önemini daha da artırmıştır.

Bunun dışında trigonometrik oranların değişimi su değirmenlerinde de görülebilmektedir. Yarıçap uzunluğu 1 metre olan bir su değirmeni, eşit aralıklı 12 kola ayrılmıştır. A konumundaki değirmenin kırmızı kolunun sağ uç noktası, AE doğrusu üzerinde olduğundan AE doğrusuna dikey uzaklığı sıfırdır. Su değirmeninin kırmızı kolunun sağ uç noktası nehirdeki suyun sağa doğru akışı ile pozitif yönde hareket ederek sırasıyla B, C, D, E, F ve A noktalarının bulunduğu konuma gelmektedir. Aşağıda su değirmeni görseli ve değirmenin kollarının yaptığı dönme hareketi sonrasında kırmızı kolun uç noktasının AE doğrusuna uzaklığının oluşturduğu grafik, Şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1: *Su değirmeni görseli ve değirmenin kırmızı kolunun uç noktasındaki hareketin AE doğrusuna uzaklığının oluşturduğu grafik*

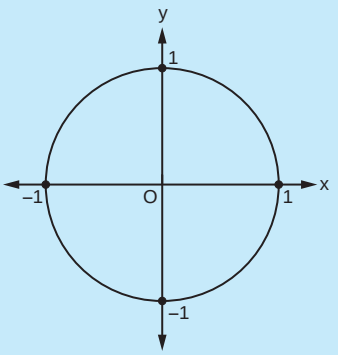
Buna göre

1. **Su değirmeninin pozitif yönde hareket etmesiyle değirmenin kırmızı kolunun uç noktasının A, B, C, D, E ve F konumlarının AE doğrusuna dikey uzaklıklarını bularak bu uzaklıklardaki değişimi yorumlayınız.**
2. **Dikey uzaklıklardaki bu değişimin trigonometrik oranlarla nasıl ifade edileceğini yorumlayınız.**

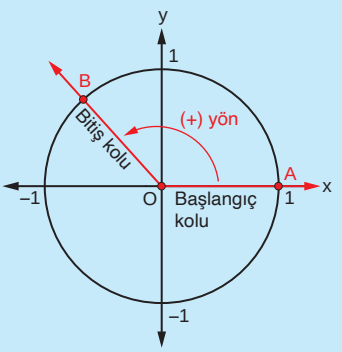
Trigonometrik oranların grafik temsillerle gösterildiği Poster'e yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

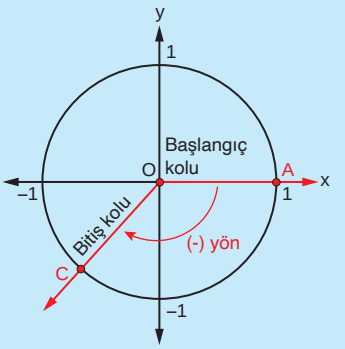
Birim Çember ve Yönlü Açı Kavramı

Trigonometrik fonksiyonların anlaşılabilmesi için birim çember ve yönlü açı kritik kavramlardır. Bu kavramlar, trigonometrik fonksiyonları hem sayısal hem de görsel olarak kavramamıza yardımcı olur.



Dik koordinat sisteminde merkezi orijin ve yarıçap uzunluğu 1 birim olan çembere **birim çember** denir.





Başlangıç noktaları aynı olan iki ışından biri başlangıç kolu, diğeri bitiş kolu olarak alındığında oluşan açıya **yönlü açı** denir. Saatin dönme yönünün tersinde olan açılar **pozitif yönlü** $(\widehat{AOB})$ saatin dönme yönünde olan açılar **negatif yönlü** $(\widehat{AOC})$ açılardır.

Çembersel hareketlerde yön tarifi yapılırken aşağı, yukarı, sağa, sola gibi ifadeleri kullanmak soru işaretleri oluşturabileceği için pozitif yönlü açı ya da negatif yönlü açı kavramları kullanılır. Örneğin Dünya'nın kendi etrafında ve Güneş etrafında dönme hareketi, atom içerisinde elektronların proton ve nötron etrafında dönme hareketi pozitif yönlü olarak kabul edilir.

1. Örnek



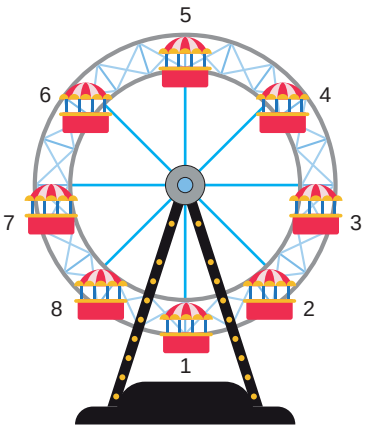
Yandaki görselde şifre girmek için oluşturulmuş bir sistem verilmiştir. Sistem üzerine merkezleri aynı iki çember arasında ve aralıkları eşit olan 20 sayı yerleştirilmiştir. Girilecek şifrenin ilk basamağı 4 olarak verilmiş ve bundan sonraki her sayı için şifre mekanizması sırasıyla -54°, 126°, 18° ve -198° çevrilerek 5 sayıdan oluşan şifre oluşturulmuştur. Mekanizmanın üzerinde bulunan gösterge sabit olup her dönme hareketi sonrasında farklı bir sayıyı göstermektedir.

Verilen bilgilerden yararlanarak şifreyi bulunuz.

Çözüm

Sistem üzerinde toplam 20 bölme bulunmaktadır. $\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$ her sayının bir bölme ilerlemesi için gerekli dönme derecesidir. Negatif yönde 54° için sistem 3 bölme hareket ettirilerek 7 sayısı bulunur. Pozitif yönde 126° için sistem 7 bölme hareket ettirilerek 0 sayısı bulunur. Pozitif yönde 18° için sistem 1 bölme hareket ettirilerek 19 sayısı bulunur. Negatif yönde 198° için sistem 11 bölme hareket ettirilerek 10 sayısı bulunur. Bu şekilde şifre 4-7-0-19-10 olarak tamamlanır.

Sıra Sizde 1

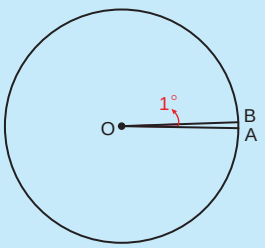


Yanda birbirine eş açılarla 1'den 8'e kadar numaralandırılmış kabinlerden oluşan bir dönme dolap görseli verilmiştir.

Buna göre dönme dolap, -225° döndükten sonra 7 numaralı kabinin olduğu konuma kaç numaralı kabinin geleceğini bulunuz.

Açı Ölçme Birimleri

Açı ölçmek için farklı birimlerden yararlanılır. Açı ölçmek için farklı birimlerden yararlanılsa da derece ve radyan açı ölçü birimlerinin kullanımı daha yaygındır.



Yanda O merkezli çember verilmiştir. A ve B noktaları çember üzerinde yer almaktadır. Tam bir dairenin 360 eş parçaya bölünmesi ile elde edilen her bir yayı gören merkez açının ölçüsüne **1 derece** $\left(m(\widehat{AOB}) = 1^\circ\right)$ denir.

1. Uygulama

Radyan Kavramı

Öğretmeninizin rehberliğinde sınıfta iki gruba ayrılınız. Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı grup arkadaşlarınızla tamamlayınız. $(\pi \approx 3,14)$

1. Birim çemberin çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

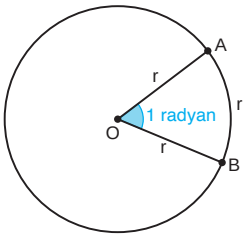
2. Birim çemberde çeyrek ve yarım çemberin yay uzunluğunun kaç birim olduğunu matematik yazılımı kullanarak hesaplayınız. Bulduğunuz yay uzunluklarının çemberin çevre uzunluğuna oranını bulunuz.

3. 2. Soruda hesaplanan oranı, 1. grup olarak yarıçap uzunluğu 2 birim ve 2. grup olarak yarıçap uzunluğu 5 birim olan orijin merkezli çemberler için de matematik yazılımı kullanarak hesaplayınız.

4. Her grup için belirlenen çemberler üzerinde alınan herhangi iki K ve M noktalarını kullanarak $m(\widehat{KOM}) = \alpha$ açı ölçüsünü oluşturunuz. Aşağıdaki tabloda verilen farklı açı ölçüleri için istenen uzunluk ve oranları matematik yazılımı kullanarak hesaplayınız. Elde ettiğiniz veriler ile aşağıdaki tabloyu eksiksiz şekilde doldurunuz.

Açı Ölçüsü (α)	**30°**		**120°**		**210°**		**300°**	
	1. Grup	**2. Grup**	**1.Grup**	**2. Grup**	**1. Grup**	**2. Grup**	**1. Grup**	**2. Grup**
Yay Uzunluğu (Birim)								
$\frac{\text{Yay Uzunluğu}}{\text{Çemberin Çevre Uzunluğu}}$								

5. Elde edilen oranları karşılaştırarak çember üzerinde bir yay uzunluğuna bağlı açı ölçüsünün nasıl tanımlanabileceğine dair fikirlerinizi arkadaşlarınızla paylaşınız.



Yanda O merkezli çember verilmiştir. A ve B noktaları çember üzerindedir. Bir çemberde yarıçap uzunluğuna (r) eşit olan yayın uzunluğunu gören merkez açının ölçüsüne **1 radyan** $\left(m(\widehat{AOB}) = 1 \text{ radyan}\right)$ denir.

2. Örnek

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Birim çemberin çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu hesaplayarak derece ve radyan arasındaki ilişkiyi yorumlayınız.
2. Birim çemberde yarım ve çeyrek çemberin yay uzunluğunu radyan olarak hesaplayınız.
3. Herhangi bir çemberde derece (D) ve radyan (R) arasındaki bağıntıyı bulunuz.

Çözüm

1. Birim çemberin yarıçap uzunluğu 1 birim olduğundan çemberin çevre uzunluğu $Ç = 2\pi r \Rightarrow 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ birim olur. Bir çember içinde çember yayının tamamını gören merkez açı ölçüsü 360° dir. Bir çember yayının tamamının ölçüsü 2π radyan ve 360° olur. Buna göre $360^\circ = 2\pi$ radyana eşit olur.
2. Birim çemberde $360^\circ = 2\pi$ eşitliğinden $\frac{2\pi}{360^\circ} = 1$ radyan elde edilir. Burada yarım çemberin yay uzunluğu $180^\circ = 180^\circ \cdot \left(\frac{2\pi}{360^\circ}\right) = \pi$ radyan şeklinde hesaplanır. Çeyrek çemberin yay uzunluğu $90^\circ = 90^\circ \cdot \left(\frac{2\pi}{360^\circ}\right) = \frac{\pi}{2}$ radyan olarak bulunur.
3. Derecenin $\frac{2\pi}{360^\circ}$ ile çarpımından radyan elde edilir. Buna göre $D \cdot \left(\frac{2\pi}{360^\circ}\right) = R$ olur. İfade sadeleştirilerek $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ eşitliği elde edilir.

- Derece ve radyanı birbirine dönüştürmek için $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ eşitliği kullanılır.
- Bu kitapta bir açının ölçüsü π cinsinden yazıldığında ölçünün birimi radyan olarak kabul edilecektir.

3. Örnek

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Ölçüsü $\frac{\pi}{3}$ olan açının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.
2. Ölçüsü 135° olan açının ölçüsünün kaç radyan olduğunu bulunuz.

Çözüm

1. Ölçüsü π olan açı 180 derece olduğundan π yerine 180° yazılır. Buradan $\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ elde edilir.
2. $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ eşitliği kullanılarak $\frac{135^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R \cdot 180^\circ = \pi \cdot 135^\circ$ bulunur. Buradan $R = \frac{\pi \cdot 135^\circ}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4}$ elde edilir.

Sıra Sizde 2

Aşağıdaki açı ölçülerinden derece olanları radyana, radyan olanları dereceye çeviriniz.

1. 195° **2.** $\frac{2\pi}{3}$ **3.** -30° **4.** $-\frac{11\pi}{12}$

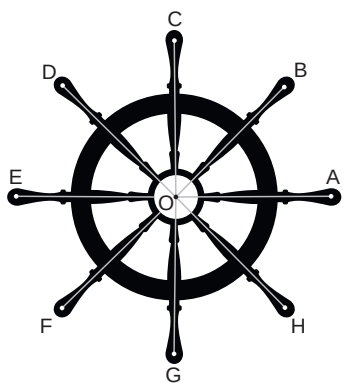
Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Esas Ölçü

2. Uygulama

Esas Ölçü Kavramı

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

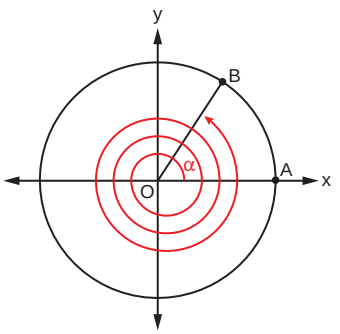


Yandaki görselde verilen bir gemiye ait O merkezli dairesel dümen ve bu dümeni döndürebilmek için sekiz adet dümen kolu verilmiştir. Dümen kollarının uç noktalarını O merkeziyle birleştiren tahta parçalar arasındaki açı ölçüleri eşit olup bu uçların konumları A, B, C, D, E, F, G ve H harfleri ile gösterilmiştir.

1. Dümenin pozitif yönde 135° dönmesi sonucunda A noktasının geldiği yeni konumu bulunuz.
2. Görseldeki dümenin negatif yönde 225° dönmesi sonucunda B noktasının geldiği yeni konumu bulunuz.

3. C noktasının ikinci kez G noktasının konumuna gelebilmesi için görseldeki dümenin pozitif yönde kaç derece dönmesi gerektiğini hesaplayınız.

4. D noktasının, görseldeki dümenin pozitif yönde 405° dönmesi sonucunda oluşan yeni konumunu bulunuz. Bulduğunuz sonuçları kullanarak ölçüsü $[0°, 360°)$ nda olmayan açıların birim çemberde nasıl gösterilebileceğini belirtiniz.



Yandaki O merkezli birim çember üzerinde alınan A ve B noktaları kullanılarak oluşturulan $\widehat{AOB}$ açısının ölçüsü α olsun. Buna göre

- $k \in \mathbb{Z}$ ve $0° \leq \alpha < 360°$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k \cdot 360°$ olan bir açının esas ölçüsü α derecedir.
- $k \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leq \alpha < 2\pi$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k \cdot 2\pi$ olan bir açının esas ölçüsü α radyandır.

4. Örnek

Aşağıdaki açıların esas ölçülerini hesaplayınız.

1. $1570°$ **2.** $\frac{59\pi}{3}$ **3.** $-1240°$ **4.** $-\frac{78\pi}{5}$

Çözüm

1. $1570°$nin esas ölçüsünü bulmak için açı içerisinde yer alan $360°$ nin katları bulunmalıdır. Bunun için $1570°$, $360°$ ye bölünür.

$$\begin{array}{r|l} 1570° & 360° \\ -\ 1440° & 4 \\ \hline 130° & \end{array}$$

$1570° = 130° + 4 \cdot 360°$ elde edilir. $1570°$nin esas ölçüsü $130°$ olarak bulunur.

2. $\frac{59\pi}{3}$ nin esas ölçüsünü hesaplamak için açı içerisinde yer alan $2\pi \left(2\pi = \frac{6\pi}{3}\right)$ nin katları bulunmalıdır. Bu sebeple açının payı paydasının iki katına bölünür.

$$\begin{array}{r|l} 59 & 6 \\ -\ 54 & 9 \\ \hline 5 & \end{array}$$

$\frac{59\pi}{3} = \frac{(9 \cdot 6 + 5)\pi}{3} = \frac{9 \cdot 6\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 9 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{3}$ olur.

$\frac{59\pi}{3}$ nın esas ölçüsü $\frac{5\pi}{3}$ olarak bulunur.

3. $-1240°$ nin esas ölçüsünü bulmak için açı içerisinde yer alan $360°$ nin katları bulunmalıdır.

Bunun için $1240°$, $360°$ ye bölünür.

$$\begin{array}{r|l} 1240° & 360° \\ -\ 1080° & 3 \\ \hline 160° & \end{array}$$

Açının esas ölçüsüne ulaşmak için açıya $3 + 1 = 4$ tam açı ölçüsü eklenir.
$-1240° + 4 \cdot 360° = -1240° + 1440° = 200°$ olur.
Buradan $-1240°$ nin esas ölçüsü $200°$ olur.

4. $-\frac{78\pi}{5}$ nin esas ölçüsünü bulmak için açı içerisinde yer alan 2π nin katları bulunmalıdır.

Bunun için açının payı, paydasının iki katına bölünür.

$$\begin{array}{r|l} 78 & 10 \\ -\ 70 & 7 \\ \hline 8 & \end{array}$$

$\frac{-78\pi}{5} = \frac{(-7 \cdot 10 - 8)\pi}{5} = -\left(\frac{7 \cdot 10\pi}{5} + \frac{8\pi}{5}\right) = -7 \cdot 2\pi - \frac{8\pi}{5}$ olur.

Açının esas ölçüsüne ulaşmak için açıya $7 + 1 = 8$ tam açı ölçüsü eklenir.

$-7 \cdot 2\pi - \frac{8\pi}{5} + 8 \cdot 2\pi = -\frac{8\pi}{5} + 2\pi = \frac{-8\pi + 10\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$ olur. Buradan

$-\frac{78\pi}{5}$ nin esas ölçüsü $\frac{2\pi}{5}$ olur.

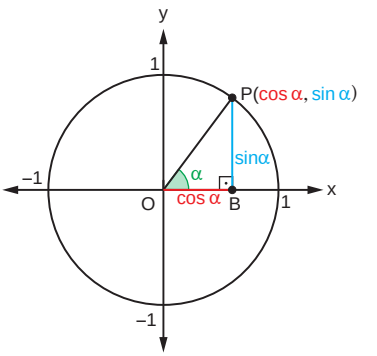
Ek soruların yer aldığı 1. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Birim Çember ve Yönlü Açı Kavramı, Açı Ölçme Birimleri ve Esas Ölçü)

Birim Çemberde Trigonometrik Oranlar

Yanda verilen birim çember üzerindeki P noktasından ve orijinden geçen [OP] nın x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açının ölçüsü α, P noktasının apsis ve ordinat değerleri sırasıyla |OB| ve |PB| olmak üzere

$\cos\alpha = \frac{|OB|}{|OP|} = \frac{|OB|}{1} \Rightarrow |OB| = \cos\alpha$

$\sin\alpha = \frac{|PB|}{|OP|} = \frac{|PB|}{1} \Rightarrow |PB| = \sin\alpha$ olur. Buna göre birim çember üzerindeki her P noktasının koordinatları $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ olur. POB dik üçgeninde Pisagor teoreminden $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ olur.



5. Örnek

Birim çember yardımıyla aşağıdaki açı ölçülerinin sinüs ve kosinüs değerlerini hesaplayınız.

1. 120° **2.** 225° **3.** 330°

Çözüm

1. $m(\widehat{AOP}) = 120°$ olacak şekilde bir P noktası belirlenir.

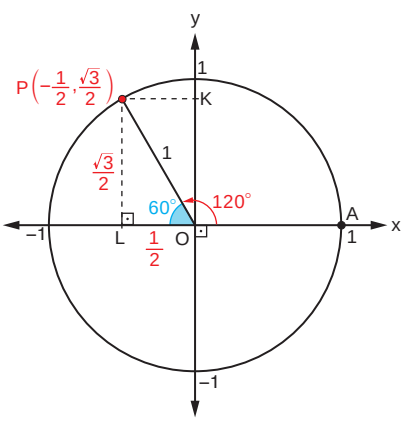
P noktasından x eksenine indirilen dikme ayağı L olsun.

O, P ve L noktaları birleştirilerek OPL dik üçgeni oluşturulur. Oluşan OPL dik üçgeninde $m(\widehat{POL}) = 60°$ olur.

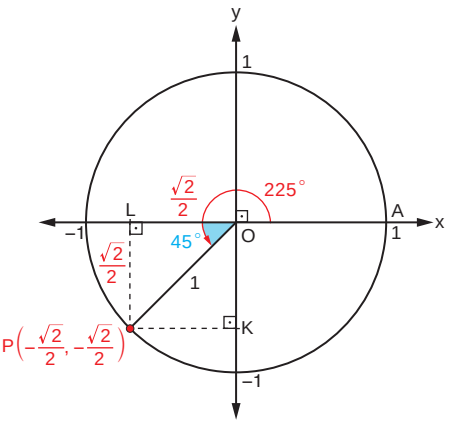
Açı ölçüleri 30°, 60° ve 90° olan OPL dik üçgeninde

$|OL| = \frac{1}{2}$ birim ve $|PL| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ birim olur. P noktası

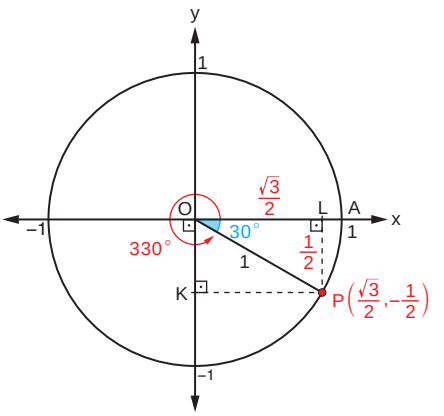
2. bölgede olduğundan $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ olur.



2. $m(\widehat{AOP}) = 225^\circ$ olacak şekilde bir P noktası belirlenir. P noktasından x eksenine indirilen dikme ayağı L olsun. O, P ve L noktaları birleştirilerek OPL dik üçgeni oluşturulur. $m(\widehat{LOP}) = 45^\circ$ olur. Açı ölçüleri 45°, 45° ve 90° olan OPL dik üçgeninde $|OL| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ birim ve $|PL| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ birim olur. P noktası 3. bölgede olduğundan $\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ve $\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ olur.



3. $m(\widehat{AOP}) = 330^\circ$ olacak şekilde bir P noktası belirlenir. P noktasından x eksenine indirilen dikme ayağı L olsun. O, P ve L noktaları birleştirilerek OPL dik üçgeni oluşturulur. $m(\widehat{POL}) = 30^\circ$ olur. Açı ölçüleri 30°, 60° ve 90° olan OPL dik üçgeninde $|OL| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ birim ve $|PL| = \frac{1}{2}$ birim olur. P noktası 4. bölgede olduğundan $\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$ ve $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

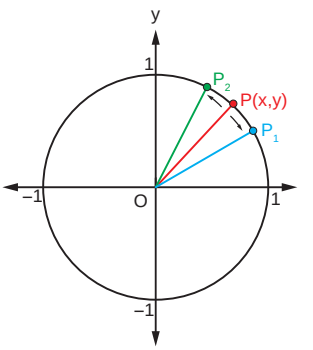


3. Uygulama

Birim Çemberde Trigonometrik Oranların Değişimi

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

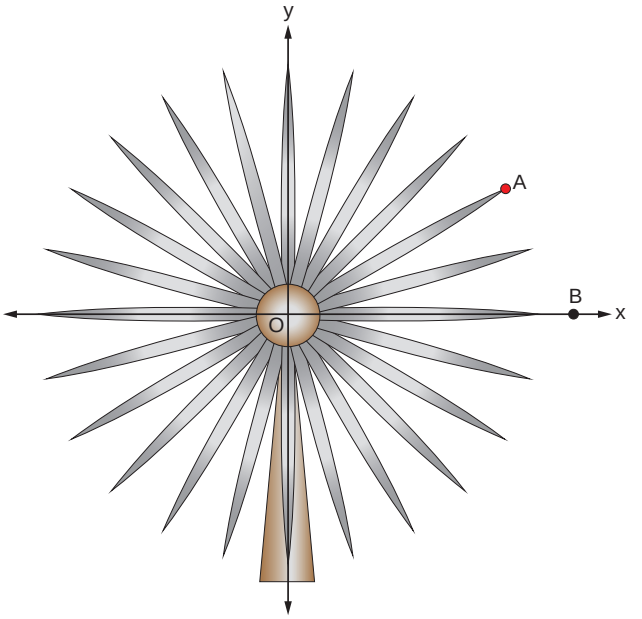
Yanda verilen birim çember üzerindeki P(x, y) noktası; negatif yönde hareket ettiğinde P_1 noktasının üzerine, pozitif yönde hareket ettiğinde ise P_2 noktasının üzerine gelmektedir. P noktasını orijinle birleştiren [OP] nın x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açının ölçüsü α, P_1 noktası için β ve P_2 noktası için θ olsun.



1. $\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ$ ve $\theta = 60^\circ$ açı ölçüleri için P, P_1 ve P_2 noktalarının koordinatlarını trigonometrik oranlarla gösteriniz.

2. P_1 ve P_2 noktalarının koordinatlarındaki trigonometrik oranların, P noktasının koordinatlarındaki trigonometrik oranlara göre değişimini yorumlayınız.

6. Örnek

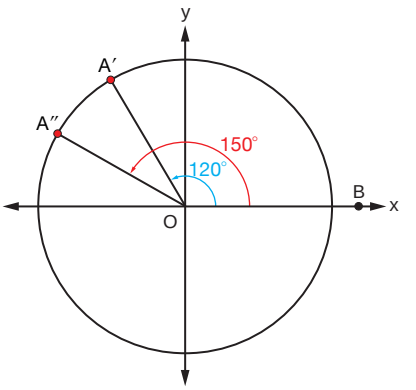


Yukarıda, bir tam dönüşünü 72 saniyede tamamlayan ve eşit uzunluktaki 24 pervaneden oluşan bir rüzgâr türbininin görseli verilmiştir. Rüzgâr türbini; merkezi orijinde, B noktası ise x ekseni üzerinde herhangi bir nokta olacak şekilde dik koordinat düzleminde modellenmiştir. Kalınlıkları önemsiz pervaneler, türbin merkezinin etrafına eşit açılarla yerleştirilmiştir. Pervanelerden birinin uç noktası A noktası olup bu noktanın merkeze uzaklığı 1 metredir.

1. Pozitif yönde dönen pervanenin üzerindeki A noktasının, görselde verilen başlangıç konumuna göre 18 ve 24 saniye sonraki koordinatlarını bulunuz.
2. A noktasının bu yeni konumlarından yararlanarak II. bölgede sinüs ve kosinüs değerlerinin nasıl değiştiğini yorumlayınız.

Çözüm

1. Rüzgar türbininin bir tam dönüşü 72 saniyede tamamlanmaktadır ve ardışık pervaneler arası yer değişikliği $\frac{72}{24} = 3$ saniyede $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$ lik dönme hareketiyle gerçekleşir.



Rüzgâr türbini üzerindeki A noktasının 18 saniye sonra bulunduğu konum A′ noktası olur. A noktasının $\frac{18}{3} = 6$ yer değiştirmesi sonucunda $m(\widehat{BOA'}) = 6 \cdot 15^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ olur. 24 saniye sonra bulunduğu konum A″ noktası olur. A noktasının $\frac{24}{3} = 8$ yer değiştirmesi sonucunda $m(\widehat{BOA''}) = 8 \cdot 15^\circ + 30^\circ = 150^\circ$ olur. A′ noktasının apsisi $\cos 120^\circ$ ve ordinatı $\sin 120^\circ$ olur. A″ noktasının apsisi $\cos 150^\circ$ ve ordinatı $\sin 150^\circ$ olur.

2. $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ olur. 2. bölgede açı ölçüleri arttıkça kosinüs değerleri azalır.

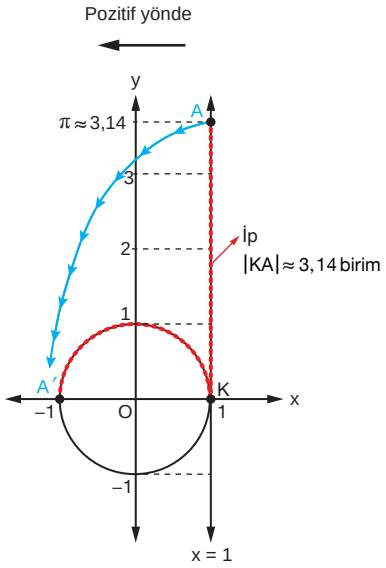
   $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ olur. 2. bölgede açı ölçüleri artıkça sinüs değerleri azalır.

4. Uygulama

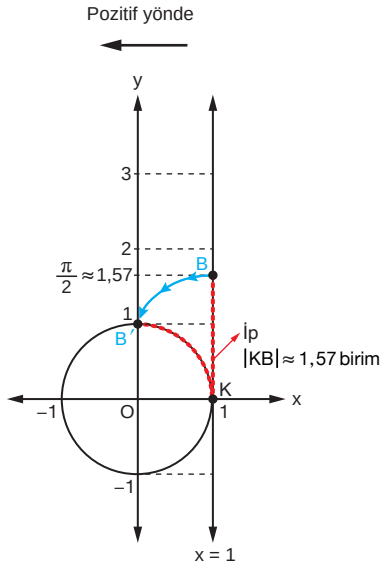
Trigonometrik Fonksiyonların Tanım Kümesini Bulma

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

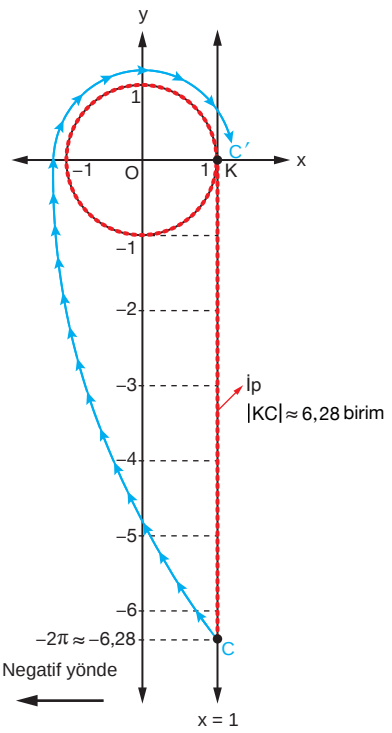
1. Aşağıdaki şekillerde verilen yeterli uzunluğa sahip ip, birim çembere $K(1, 0)$ noktasında teğet olup birim çember üzerine istenilen yönlerde sarılacaktır. İpin başlangıç noktası $K(1, 0)$ dır. $x = 1$ doğrusu üzerindeki A, B, C ve D noktalarından herhangi biri ile K noktası arasındaki uzaklık, ipin uzunluğu olarak kabul edilecektir.



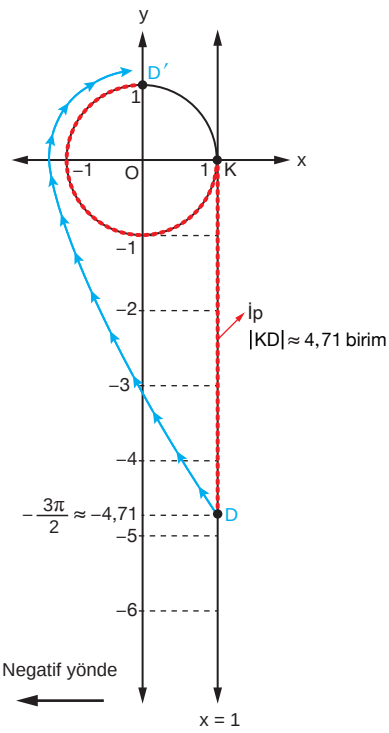
Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3

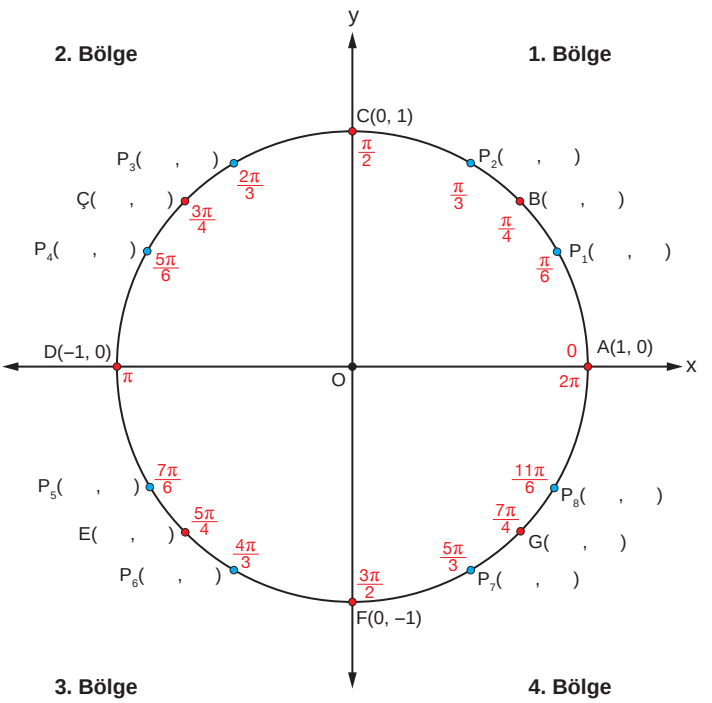


Şekil 4

a) Şekil 1'de gösterilen A noktası, ipin birim çember üzerinde pozitif yönde sarılması sonucunda $A'(-1, 0)$ noktasına; Şekil 2'de gösterilen B noktası, ipin birim çember üzerinde pozitif yönde sarılması sonucunda $B'(0, 1)$ noktasına denk gelmektedir. Buna göre işlem sırasında ipin üzerindeki 2,87 sayısının birim çember üzerinde hangi bölgeye denk geleceğini bulunuz.

b) Şekil 3'te gösterilen C noktası, ipin birim çember üzerinde negatif yönde sarılması sonucunda $C'(1, 0)$ noktasına; Şekil 4'te gösterilen D noktası, ipin birim çember üzerinde negatif yönde sarılması sonucunda $D'(0, 1)$ noktasına denk gelmektedir. Buna göre işlem sırasında ipin üzerindeki $-5,3$ sayısının birim çember üzerinde hangi bölgeye denk geleceğini bulunuz.

2. Aşağıdaki birim çemberde başlangıç noktası A olmak üzere pozitif yönde ilerlendiğinde A, B, C, Ç, D, E, F, G ve $P_i (i \in [1, 8] \cap \mathbb{Z})$ noktaları oluşmaktadır. A noktası ve şekilde belirtilen diğer noktaların pozitif yönde birleşimi ile oluşan yay uzunluklarının birim cinsinden değeri, çember üzerinde gösterilmiştir. Örneğin AP_1 yay uzunluğu $\frac{\pi}{6}$ birimdir.



a) Bu noktaların koordinatlarını, trigonometrik fonksiyon özelliklerine sahip bir hesap makinesi kullanarak bulunuz ve bulduğunuz sonuçları ilgili boşluklara yazınız.

b) Birim çember üzerinde verilen noktaların koordinatlarını ifade eden sinüs ve kosinüs değerlerindeki değişimi inceleyerek Tablo 1 ve Tablo 2'yi örnekteki gibi doldurunuz.

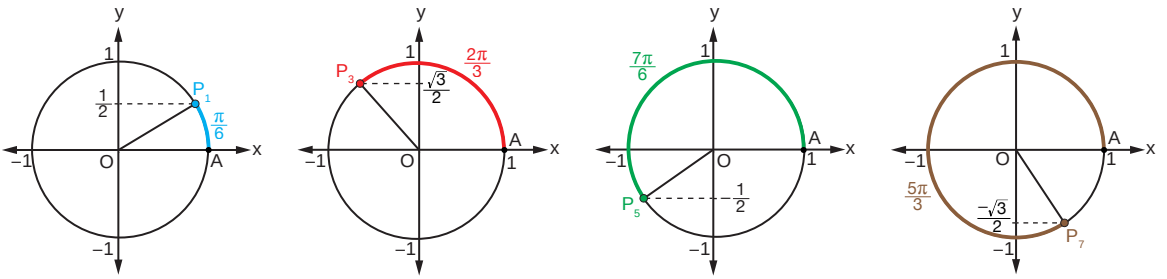
Tablo 1

	1. Bölge $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$		2. Bölge $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$
$x < \frac{\pi}{4}$	x sayısı büyüdükçe sinüs değerleri artar, kosinüs değerleri azalır.	$x < \frac{3\pi}{4}$	
$x = \frac{\pi}{4}$	Sinüs değerleri ile kosinüs değerleri eşittir.	$x = \frac{3\pi}{4}$	
$x > \frac{\pi}{4}$	x sayısı büyüdükçe sinüs değerleri artar, kosinüs değerleri azalır.	$x > \frac{3\pi}{4}$	

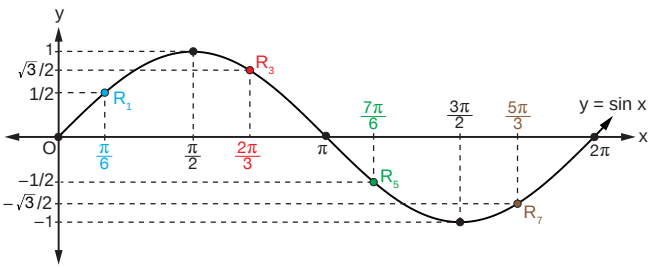
Tablo 2

	3. Bölge $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$		4. Bölge $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$
$x < \frac{5\pi}{4}$		$x < \frac{7\pi}{4}$	
$x = \frac{5\pi}{4}$		$x = \frac{7\pi}{4}$	
$x > \frac{5\pi}{4}$		$x > \frac{7\pi}{4}$	

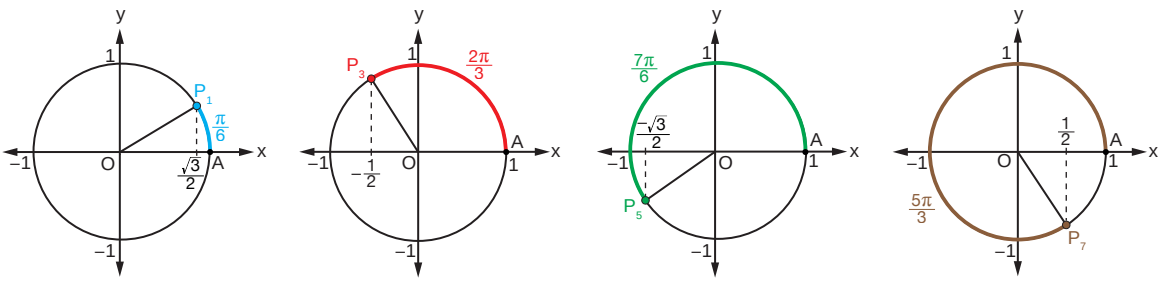
3. 2. soruda verilen birim çember üzerindeki bazı noktalara karşılık gelen pozitif yönlü yay uzunluklarının sinüs ve kosinüs değerlerinin bulunmasına ilişkin grafikler aşağıda verilmiştir.



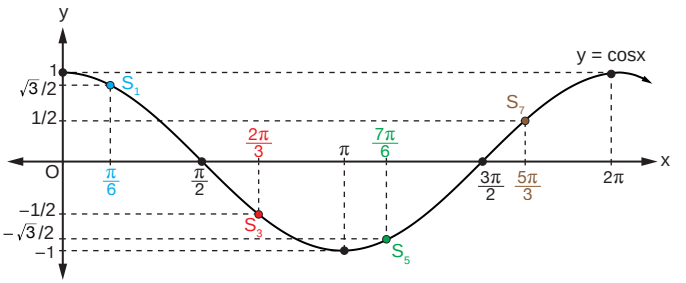
Birim çember üzerindeki yayın uç noktaları olan P_1, P_3, P_5 ve P_7 noktalarının ordinatları



Birim çember üzerindeki farklı uzunluklardaki pozitif yönlü yaylara karşılık gelen noktaların (P_1, P_3, P_5 ve P_7) yay uzunluklarına bağlı ordinatlarını gösteren eğri



Birim çember üzerindeki yayın uç noktaları olan P_1, P_3, P_5 ve P_7 noktalarının apsisleri



Birim çember üzerindeki farklı uzunluklardaki pozitif yönlü yaylara karşılık gelen noktaların (P_1, P_3, P_5 ve P_7) yay uzunluklarına bağlı apsislerini gösteren eğri

a) Yukarıdaki grafik temsillerini inceleyerek eğri üzerindeki noktalar ile bu noktaların x ve y eksenlerindeki karşılıklarının, birim çember üzerindeki pozitif yönlü yay uzunluklarıyla ilişkisini bulunuz. Ardından bu ilişki hakkındaki düşüncelerinizi yazınız.

b) Birim çemberdeki yay uzunluklarının negatif yönde oluşturulması durumunda grafiklerde oluşabilecek değişimlere dair fikirlerinizi yazınız.

4. a) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ve $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ trigonometrik ifadelerinden hareketle 2. soruda verilen A, B, C, Ç, D, E, F, G ve P noktalarına karşılık gelen yay uzunluklarının tanjant ve kotanjant değerlerini bulunuz.

b) Birim çember üzerinde verilen noktaya karşılık gelen açının ölçülerinin tanjant ve kotanjant değerlerindeki değişimini inceleyerek Tablo 3 ve Tablo 4'ü örnekteki gibi doldurunuz.

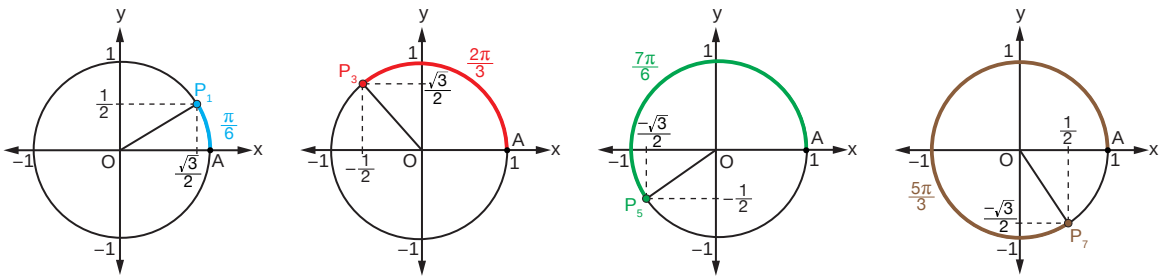
Tablo 3

	1. Bölge $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$		2. Bölge $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$
$x < \frac{\pi}{4}$	x sayısı arttıkça tanjant değerleri artar, kotanjant değerleri azalır.	$x < \frac{3\pi}{4}$	
$x = \frac{\pi}{4}$	Tanjant değerleri ile kotanjant değerleri eşittir.	$x = \frac{3\pi}{4}$	
$x > \frac{\pi}{4}$	x sayısı arttıkça tanjant değerleri artar, kotanjant değerleri azalır.	$x > \frac{3\pi}{4}$	

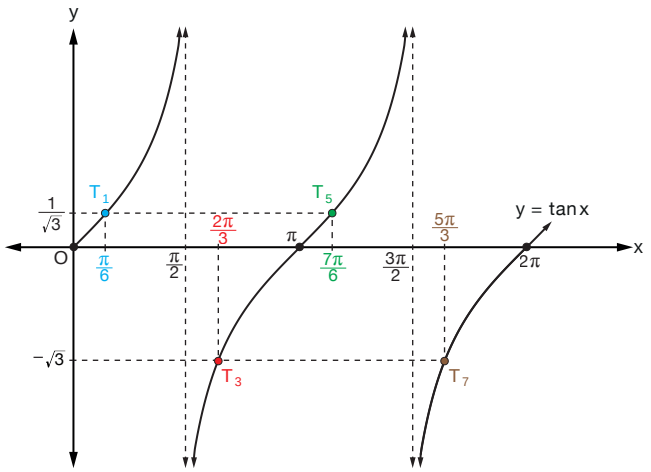
Tablo 4

	3. Bölge $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$		4. Bölge $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$
$x < \frac{5\pi}{4}$		$x < \frac{7\pi}{4}$	
$x = \frac{5\pi}{4}$		$x = \frac{7\pi}{4}$	
$x > \frac{5\pi}{4}$		$x > \frac{7\pi}{4}$	

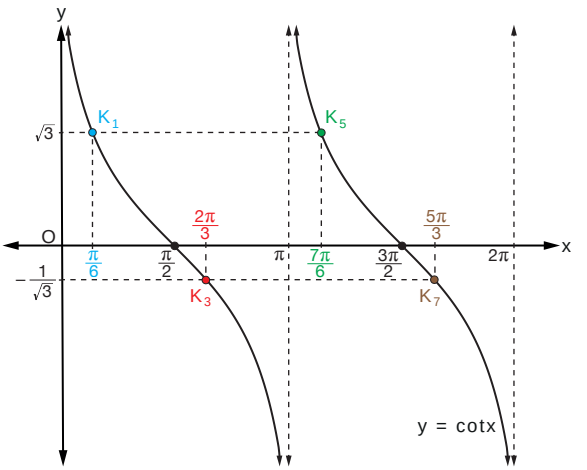
5. 2. soruda verilen birim çember üzerindeki bazı noktalara karşılık gelen pozitif yönlü yay uzunluklarının tanjant ve kotanjant değerlerinin bulunmasına ilişkin grafikler aşağıda verilmiştir.



Birim çember üzerindeki P_1, P_3, P_5 ve P_7 noktalarının apsisleri ve ordinatları



Birim çember üzerindeki farklı uzunluklardaki pozitif yönlü yaylara karşılık gelen noktaların (P_1, P_3, P_5 ve P_7) yay uzunluklarına bağlı ordinatlarının apsislerine oranını gösteren eğri



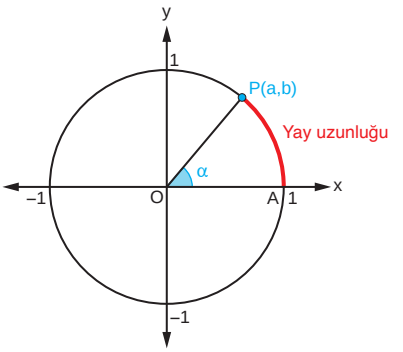
Birim çember üzerindeki farklı uzunluklardaki pozitif yönlü yaylara karşılık gelen noktaların (P_1, P_3 , P_5 ve P_7) yay uzunluklarına bağlı apsislerinin ordinatlarına oranını gösteren eğri

a) Yukarıdaki grafik temsillerini inceleyerek oranların gösterildiği eğri üzerindeki noktaların x ve y eksenlerine karşılık gelen değerler ile bu değerleri veren birim çember üzerindeki noktaların oluşturduğu pozitif yönlü yay uzunluklarının arasındaki ilişkiyi bulunuz ve bu ilişkiye dair fikirlerinizi yazınız.

b) Birim çemberde yayın negatif yönde oluşturulması durumunda grafiklerde gözlenebilecek değişimlere dair fikirlerinizi yazınız.

6. Gerçek sayılar ile açı değerleri arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurarak x açısına bağlı sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının nasıl tanımlanabileceğine dair fikirleriniz üzerine arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız.

Birim çember üzerindeki her P noktası için $P(a,b) = P(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $a \neq 0$ olmak üzere $\frac{b}{a} = \tan\alpha$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b} = \cot\alpha$ eşitlikleri sağlanır. O noktası sabit kalmak şartıyla P noktası çember üzerinde hareket ettirildikçe değişen her bir P noktasına birim çemberde bir AP yayı karşılık gelir ve $m(\widehat{AOP}) = \alpha$ açı ölçüsü oluşur. P noktasının hareketiyle AP yayı da değişir. Bu yay uzunluğu çember üzerinde her zaman bir gerçek sayı ile ifade edilir. Dolayısıyla birim çemberde her açı ölçüsüne karşılık gelen bir gerçek sayı vardır.



$f: \mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = \sin x,$
$g: \mathbb{R} \to [-1,1], g(x) = \cos x,$
$h: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, \ h(x) = \tan x,$
$r: \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, r(x) = \cot x$ şeklinde tanımlı f, g, h ve r fonksiyonlarına **trigonometrik referans fonksiyonlar** denir.

5. Uygulama

Uygun Tanım ve Değer Kümesine Sahip $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \tan x$ ve $r(x) = \cot x$ Trigonometrik Referans Fonksiyonların Nitel Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. a) Tablo 1 ve Tablo 2'de verilen açı ölçülerini kullanarak f, g, h ve r trigonometrik referans fonksiyonların değerlerini birim çemberden yararlanarak hesaplayınız ve tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Fonksiyonlar	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$f(x) = \sin x$	0						
$g(x) = \cos x$	1						
$h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\frac{0}{1} = 0$						
$r(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\frac{1}{0}$ (tanımsız)						

Tablo 2

Fonksiyonlar	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x) = \sin x$							
$g(x) = \cos x$							
$h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$							
$r(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$							

b) Tablo 1 ve Tablo 2'deki bilgilerden yararlanarak f, g, h ve r fonksiyonlarının $[0, 2\pi]$ ndaki grafiklerini çiziniz.

2. **a)** Aşağıdaki adımları matematik yazılımında uygulayarak 1. soruda verilen f, g, h ve r fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

1. adım: Bilgisayar veya etkileşimli tahtada matematik yazılımını açarak **Giriş** bölümüne $f(x) = \sin x$ yazınız ve **Enter** tuşuna basınız.

2. adım: Aynı işlemi g, h ve r fonksiyonlarının grafiklerini elde etmek için uygulayınız.

b) Elde edilen grafikleri 1. soruda çizdiğiniz grafiklerle karşılaştırarak varsa farklılıkları yazınız.

3. f, g, h ve r trigonometrik referans fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili verilen aşağıdaki soruları 1 ve 2. soruda elde edilen grafikleri inceleyerek cevaplayınız. Düşüncelerinizi temellendirerek sorulara verdiğiniz cevapları sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız ve arkadaşlarınızı etkin bir şekilde dinleyerek verilen cevaplara yönelik yorumlar yapınız.

a) Fonksiyonların grafikleri incelendiğinde aynı y değerini veren farklı x açı ölçüleri var mıdır? Varsa bu y değerlerini tekrar etme durumlarına göre yorumlayınız.

b) Fonksiyonların değer kümesindeki her gerçek sayıya karşılık gelen bir x değeri var mıdır? Açıklayınız.

c) Fonksiyonların sıfırlarını bularak pozitif ve negatif oldukları aralıkları belirtiniz.

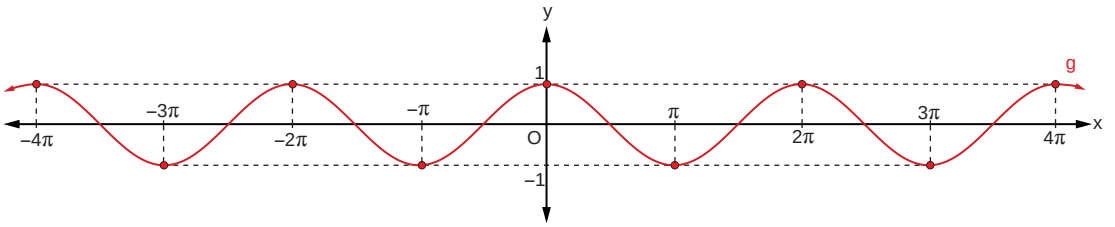
ç) Fonksiyonları tanımlandıkları aralıklardaki artanlık ve azalanlık durumlarını inceleyerek yorumlayınız.

d) Fonksiyon grafiklerinin maksimum ve minimum noktalarını grafik üzerinden yorumlayınız.

e) Fonksiyonların grafiklerini inceleyerek tek ya da çift fonksiyon olma durumlarını gerekçeleriyle açıklayınız.

Gerçek sayıların alt aralıklarında tanımlı ve değerli f fonksiyonu için $f(x) = f(x + T)$ eşitliğini sağlayan $T \in \mathbb{R}^+$ varsa f fonksiyonuna **periyodik fonksiyon**, en küçük T sayısına bu fonksiyonun **esas periyodu** denir. Esas periyot (T) aynı değerin tekrar ettiği en küçük pozitif gerçek sayıdır.

4. **a)** Aşağıdaki uygun tanım ve değer kümesine sahip $g(x) = \cos x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonun grafiğini inceleyerek fonksiyonun periyodunu bulunuz.



b) Matematik yazılımlarından yararlanarak a maddesinde yapılan incelemeyi sinüs, tanjant ve kotanjant trigonometrik referans fonksiyonları için de yapınız ve bu fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

c) Aşağıdaki tabloları doldurarak $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

Tablo 3

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	Periyodu
$\sin x$												

Tablo 4

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π	Periyodu
$\cos x$												

Tablo 5

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	Periyodu
$\tan x$												

Tablo 6

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	Periyodu
$\cot x$												

5. Çizdiğiniz grafiklerden ve sınıfça yaptığınız tartışmalardan elde ettiğiniz sonuçları göz önünde bulundurarak $f:[0,2\pi) \to [-1,1], f(x) = \sin x$, $g:[0,2\pi) \to [-1,1], g(x) = \cos x$, $h:\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, h(x) = \tan x$ ve $r:(0,\pi) \to \mathbb{R}, r(x) = \cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonların nitel özelliklerini bulunuz ve Tablo 7'yi doldurunuz.

Tablo 7

Nitel Özellik		$f(x) = \sin x$	$g(x) = \cos x$	$h(x) = \tan x$	$r(x) = \cot x$
Tanım Kümesi					
Görüntü Kümesi					
İşareti	(+)				
	(−)				
Artan Olduğu Aralık					
Azalan Olduğu Aralık					
Maksimum Noktası ve Değeri					
Minimum Noktası ve Değeri					
Bire Bir Olma Durumu					
Örten Olma Durumu					
Periyodu					
Tekliği Çiftliği					
Sıfırları					

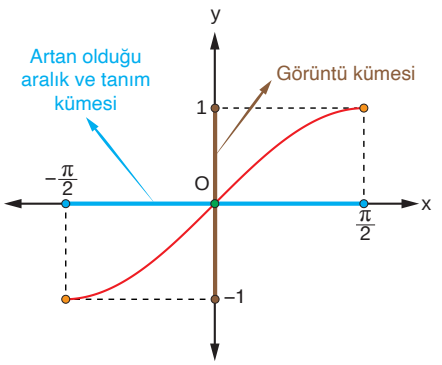
7. Örnek

$f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonu veriliyor.

Buna göre f fonksiyonunun grafiğini çizerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Tanım ve görüntü kümesini bulunuz.
2. İşaretini ve sıfırını bulunuz.
3. Artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.
4. Maksimum-minimum değerlerini ve bu değerleri aldığı noktaları bulunuz.
5. Bire birliğini ve örtenliğini inceleyiniz.
6. Tek ya da çift olma durumunu inceleyiniz.

Çözüm



$f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.

Buna göre fonksiyonun

1. Tanım kümesi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, görüntü kümesi $[-1,1]$ dır.
2. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ için $f(x) < 0$ olduğundan fonksiyonun bu aralıkta işareti negatiftir. $x = 0$ için $f(x) = 0$ olduğundan fonksiyonun sıfırı 0'dır. $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $f(x) > 0$ olduğundan fonksiyonun bu aralıkta işareti pozitiftir.

3. $\forall a, b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ için $a < b$ iken $f(a) < f(b)$ olduğundan $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ nda artandır.

4. Maksimum değeri 1, maksimum değerini aldığı nokta $x = \frac{\pi}{2}$ dir.

   Minimum değeri -1, minimum değerini aldığı nokta $x = -\frac{\pi}{2}$ dir.

5. Tanım kümesindeki farklı x değerlerine karşılık gelen $y = f(x)$ değerleri farklı olduğundan f fonksiyonu bire birdir. Değer kümesindeki her $y = f(x)$ değeri, tanım kümesindeki en az bir x değerine karşılık geldiğinden f fonksiyonu örtendir.

6. f fonksiyonu, tanım aralığında tek fonksiyondur.

Sıra Sizde 3

$f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \tan x$ **şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonu veriliyor.**

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. **Tanım kümesini bulunuz.**
2. **Görüntü kümesini bulunuz.**
3. **İşaretini ve sıfırlarını inceleyiniz.**
4. **Artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.**
5. **Maksimum-minimum değerlerini ve bu değerleri aldığı noktaları bulunuz.**
6. **Bire birliğini inceleyiniz.**
7. **Örtenliğini inceleyiniz.**
8. **Tekliğini ve çiftliğini inceleyiniz.**
9. **Periyodunu bulunuz.**

Ek soruların yer aldığı 2. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Trigonometrik Referans Fonksiyonları ve Nitel Özellikleri)

Performans Görevi

Adı: Trigonometrik Referans Fonksiyonların Nitel Özellikleri

Beklenen Performans: Trigonometrik referans fonksiyonların nitel özelliklerinin incelenmesiyle ilgili bilgileri araştırmak ve bu bilgileri dijital araçlar kullanarak sunma.

Görev: Bu görevde trigonometrik referans fonksiyonların nitel özelliklerini (Tanım kümesi, görüntü kümesi, bire birlik, örtenlik, artanlık-azalanlık vb. gibi) fonksiyonların grafik çizimleri yardımıyla inceleyerek sınıf arkadaşlarınıza sunmanız beklenmektedir.

Yönerge:

Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Yapılacak işleri ve çalışma takviminizi içeren bir çalışma planı oluşturunuz.
- Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz.
- Çalışmanızı öğretmeninizin belirlediği sürede tamamlayınız.

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Trigonometrik referans fonksiyonların nitel özelliklerini belirleyiniz.
- Belirlediğiniz nitel özellikleri her bir trigonometrik referans fonksiyonu için ayrı ayrı ele alarak inceleyiniz.
- Çalışmanız için bir sunum hazırlayınız.

Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Oluşturduğunuz sunuyu sınıfınızda arkadaşlarınızla paylaşınız.
- Tamamladığınız çalışmayı öğretmeninize teslim ediniz.

Değerlendirme: Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Kontrol Noktası

Gerçek sayılarda tanımlı ve değerli trigonometrik referans fonksiyonların nitel özelliklerinin tablosu aşağıda verilmiştir.

Nitel Özellikler	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
Tanım Kümesi	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}-\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
Görüntü Kümesi	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Artanlık/Azalanlık	Artan/Azalan	Artan/Azalan	Daima artan	Daima azalan
Maksimum Nokta ve Minimum Nokta	Var	Var	Yok	Yok
Bire Bir Olma Durumu	Hayır	Hayır	Hayır	Hayır
Örten Olma Durumu	Hayır	Hayır	Evet	Evet
Periyodu	2π	2π	π	π
Tek-Çift Fonksiyon	Tek	Çift	Tek	Tek
Sıfırları	$\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$	$\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$	$\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Trigonometrik Referans Fonksiyonlarından Türetilen Fonksiyonlar

Trigonometrik referans fonksiyonlardaki dönüşümler incelenerek; fonksiyonların grafiklerinin gerilmesi veya sıkıştırılması, periyot ve ötelenme özelliklerindeki değişiklikler analiz edilebilir.

6. Uygulama

$f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ Şeklinde Tanımlı Trigonometrik Referans Fonksiyondan Türetilen $g(x) = k \cdot f(mx + r) + s$ $(k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ Trigonometrik Fonksiyonun Nitel Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

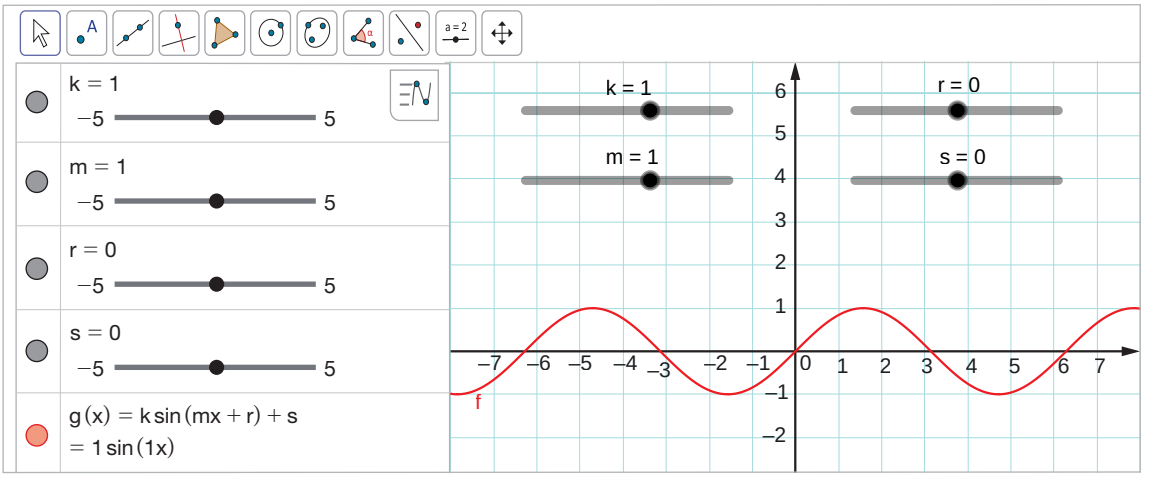
1. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan k, m, r ve s sürgülerini tanımlayınız ve aralığı -5 ile 5 olarak seçiniz.

2. adım: Cebir menüsünde yer alan **Giriş** bölümüne $g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$ yazınız.

3. adım: Sürgüleri $k = 1, m = 1, r = 0, s = 0$ seçerek $f(x) = \sin x$ trigonometrik referans fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



a) $m = 1, r = 0, s = 0$ ve $k \neq 0$ iken k sürgüsüne Tablo 1'deki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Fonksiyon İsmi	k Sürgüsünün Değeri	Oluşan Sinüs Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 2$	$h(x) = 2 \cdot \sin x$	Her bir bağımsız değişkenine karşılık gelen değeri 2 ile çarpma	2 kat dikey germe
n	$k = -1$			
t	$k = 3$			
p	$k = -4$			

b) $m = 1, r = 0, s \neq 0$ ve $k \neq 0$ iken k ve s sürgüsüne Tablo 2'deki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 2

Fonksiyon İsmi	k ve s Sürgüsünün Değeri	Oluşan Sinüs Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1$ ve $s = 4$	$h(x) = \sin x + 4$	Her bir bağımsız değişkene karşılık gelen fonksiyon değerine 4 ekleme	y ekseni boyunca pozitif yönde 4 birim öteleme
n	$k = -1$ ve $s = 2$			
t	$k = 3$ ve $s = -1$			
p	$k = -4$ ve $s = -\frac{1}{2}$			

c) $m \neq 0$ ve $r = 0$ iken k, s ve m sürgüsüne Tablo 3'teki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3

Fonksiyon İsmi	k, s ve m Sürgüsünün Değeri	Oluşan Sinüs Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1, s = 0$ ve $m = 2$	$h(x) = \sin 2x$	Her bir bağımsız değişkeni 2 ile çarpma	x ekseni boyunca 2 kat daralma
n	$k = -2, s = 2$ ve $m = 3$			
t	$k = 1, s = 0$ ve $m = -\frac{1}{2}$			
p	$k = -4, s = -\frac{1}{2}$ ve $m = \frac{1}{3}$			

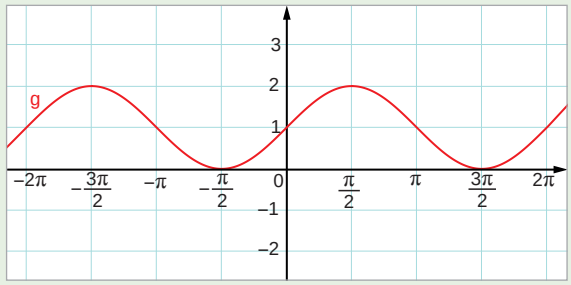
ç) $m \neq 0$ ve $k \neq 0$ iken k, s, m ve r sürgüsüne Tablo 4'teki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 4

Fonksiyon ismi	k, s, m ve r Sürgüsünün Değeri	Oluşan Sinüs Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Sinüs Trigonometrik Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1, s = 2,$ $m = 1$ ve $r = -3$	$h(x) = \sin(x - 3) + 2$	Her bir bağımsız değişkenin 3 eksiğinin fonksiyon değerine 2 ekleme	x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme
n	$k = 2, s = 0,$ $m = 1$ ve $r = 3$			
t	$k = 3, s = -2,$ $m = 2$ ve $r = 1$			
p	$k = -1, s = 3,$ $m = -2$ ve $r = 0$			

2. Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı f trigonometrik referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümler sonucunda elde edilen sinüs fonksiyonlarının cebirsel ve grafik temsilini bularak Tablo 5'te boş bırakılan kısmı örnekteki gibi doldurunuz. Fonksiyonların grafik temsillerini matematik yazılımlarını kullanarak oluşturunuz.

Tablo 5

f Fonksiyonunun Grafiğine Uygulanan Dönüşüm	Cebirsel Temsil	Grafik Temsili
y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme	$g(x) = \sin x + 1$	
4 kat sıkıştırma ve x ekseni boyunca negatif yönde 3 birim öteleme		

3. Gerçek sayılarda tanımlı ve değerli $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı f trigonometrik referans fonksiyonun nitel özelliklerinden hareketle Tablo 6 ve Tablo 7'de cebirsel temsili verilen sinüs fonksiyonlarının nitel özellikleri ile ilgili varsayımlarınızı örnekteki gibi ifade ediniz.

Tablo 6

$h: \mathbb{R} \to [-3, 1], h(x) = 2 \cdot \sin(x + 3) - 1$	
Nitel Özellikler	**Varsayımlar**
Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	Görüntü kümesi $[-3, 1]$ dır.
Bire birliği	
Örtenliği	
Periyodu	
Sıfırları	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlığı-Azalanlığı	
Teklik-Çiftlik	

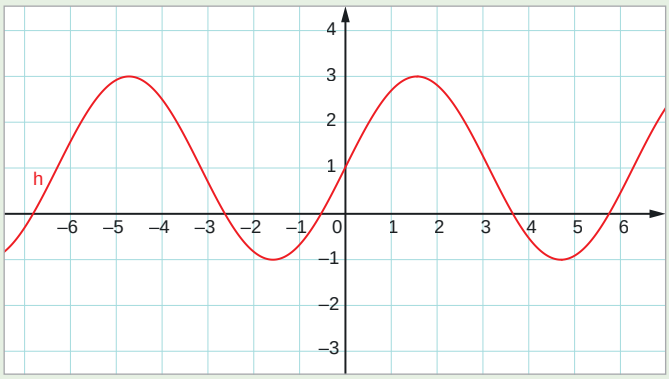
Tablo 7

$g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s (k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$	
Nitel Özellikler	**Varsayımlar**
Tanım Kümesi	Tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.
Görüntü Kümesi	
Bire birliği	
Örtenliği	
Periyodu	
Sıfırları	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlığı-Azalanlığı	
Teklik-Çiftlik	

4. Aşağıda $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonundan türetilmiş bazı fonksiyonlar verilmiştir.

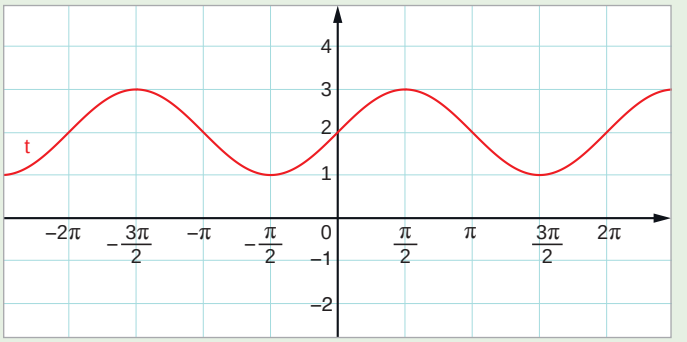
a) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz ve istenen nitel özellikleri bularak Tablo 8'i örnekteki gibi doldurunuz.

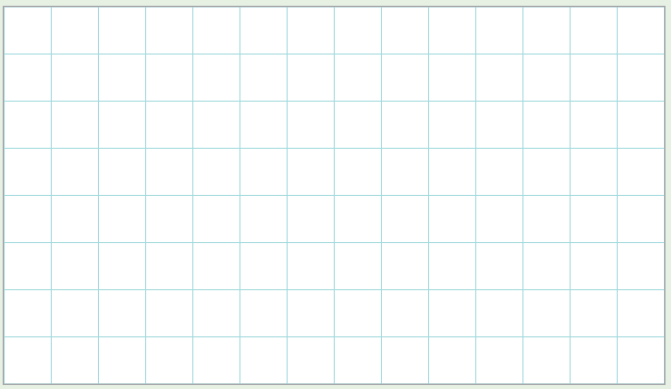
Tablo 8

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$h(x) = 2 \cdot \sin x + 1$	Grafik		
		Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun tüm gerçek sayılar için tanımlı olduğu görülmektedir. Tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.	Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun görüntü aralığının $[-1, 3]$ olduğu görülmektedir.
	Cebirsel	f trigonometrik referans fonksiyonu $\mathbb{R}$ de tanımlıdır. $h(x) = 2 \cdot f(x) + 1 = 2 \cdot \sin x + 1$ olduğu için h fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$ olur.	f trigonometrik referans fonksiyonunun görüntü kümesi $[-1, 1]$ dır. Buradan $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cdot \sin x \leq 2$ $\Rightarrow -1 \leq 2 \cdot \sin x + 1 \leq 3$ olduğu için görüntü kümesi $[-1, 3]$ olur.
$n(x) = \sin(x + 2) - 3$	Grafik		
	Cebirsel		

b) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz ve istenen nitel özellikleri bularak Tablo 9'u örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 9

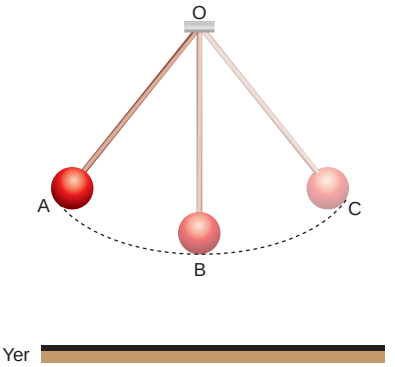
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Periyot	Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar
$t(x) = \sin x + 2$	Grafik			
	Grafik	Grafik incelendiğinde t fonksiyonunun periyodik olduğu görülür. f trigonometrik referans fonksiyonun periyodu 2π dir. t fonksiyonunun grafiği, f fonksiyonunun grafiğinin y ekseninin pozitif yönünde 2 birim ötelenmiş şeklidir. Bu sebeple t fonksiyonunun periyodu 2π dir.	Grafik incelendiğinde t fonksiyonunun maksimum değeri 3'tür. Maksimum değeri veren noktaları ise $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in \mathbb{Z})$ olur. t fonksiyonunun minimum değeri 1'dir. Minimum değeri veren noktaları ise $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in \mathbb{Z})$ olur.	Grafik incelendiğinde $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ nda t fonksiyonunun değerlerinin arttığı, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ nda t fonksiyonunun değerlerinin azaldığı ve $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ nda t fonksiyonunun değerlerinin arttığı görülür. t fonksiyonuna ait grafik bu aralıkları 2π lik periyotlarla tekrarlar.
	Cebirsel	$g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği, m gerçek sayısının mutlak değerine bağlı olarak yatay sıkıştırmaya veya germeye sebep olur. Bu sebeple periyot $T = \frac{2\pi}{\lvert m \rvert}$ şeklinde hesaplanır. t fonksiyonunun periyodu $m = 1$ için $T = 2\pi$ olur.	f trigonometrik referans fonksiyonun maksimum noktaları ve değeri $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in \mathbb{Z})$ ve $y = 1$, minimum noktaları ve değeri ise $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in \mathbb{Z})$ ve $y = -1$'dir. $t(x) = f(x) + 2 = \sin x + 2$ olduğu için t fonksiyonunun maksimum noktaları ve değeri $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in \mathbb{Z})$ ve $y = 3$, minimum noktaları ve değeri $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in \mathbb{Z})$ ve $y = 1$ olur.	$t(x) = f(x) + 2 = \sin x + 2$ olduğu için t fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklar, y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ötelemeden dolayı f fonksiyonunki ile aynı kalmaktadır. Buna göre t fonksiyonu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ nda artan, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ nda azalandır.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Periyot	Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar
$p(x) = -2 \cdot \sin 3x - 1$	Grafik			
	Cebirsel			

5. 3. soruda yapılan varsayımlardan yararlanarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f trigonometrik referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$ $(k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

6. Oluşturduğunuz varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f trigonometrik referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot \sin(mx + r) + s$ $(k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz. Oluşturduğunuz önermeleri sözel veya cebirsel olarak ifade ediniz.

7. Aşağıdaki soruları çözünüz. Elde ettiğiniz önermelerin gerçek yaşam bağlamlarındaki kullanışlılığını değerlendiriniz.



O noktasında sabitlenmiş, uzunluğu $|OA| = 18$ cm olan basit bir sarkaç A ve C noktaları arasında salınım hareketi yapmaktadır. Sarkaç ile dikey düzlem arasındaki açı ölçüsü x radyan olmak üzere sarkacın topuzunun yerden yüksekliğinin değişimi $f(x) = 23 - 18 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ şeklinde tanımlanan sinüs trigonometrik fonksiyonu ile modellenmiştir.

Buna göre

a) Sarkacın topuzunun yerden yüksekliğinin bulunabilmesi için sinüs referans fonksiyonuna hangi dönüşümlerin uygulanması gerektiğini belirtiniz.

b) Sarkaç salınım hareketini yaparken topuzun yerden yüksekliğinin arttığı ve azaldığı aralıkları bulunuz.

8. Aşağıdaki önermeleri cebirsel olarak ispatlayınız veya grafiksel olarak doğrulayınız. İspatınızı cebirsel olarak gerçekleştirirken mantık bağlaçlarını ve niceleyicileri, ispatın sistematikliğini ve matematiksel kesinliğini yansıtacak şekilde kullanınız.

a) "$\forall x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = \sin 4x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun $[0, 2\pi)$ nda 8 tane sıfırı vardır."

önermesinin ispatı ile ilgili aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Tablo 10

Önermenin Sözel İspatı	Önermenin Cebirsel İspatı
$f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonunun periyodu belirlenerek $[0, 2\pi)$ nda sıfırlarının sayısı bulunur.	$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonun periyodu 2π ve $[0, 2\pi)$ nda f fonksiyonunun sıfırların sayısı 2'dir.
$g(x) = \sin 4x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonu elde edilirken f trigonometrik referans fonksiyonuna yapılan dönüşüm belirlenerek g fonksiyonunun periyodu bulunur.	
$g(x) = \sin 4x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun $[0, 2\pi)$ nda sıfırlarının sayısı bulunur.	

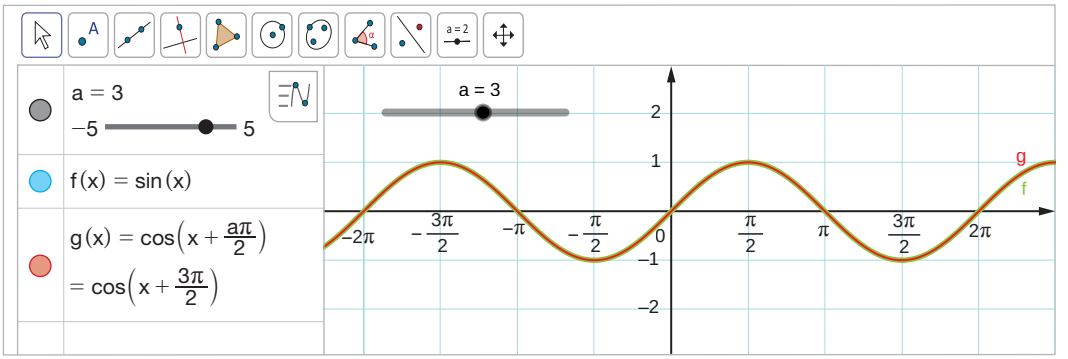
b) "$\forall x \in \mathbb{R}$ için $\sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ olur" şeklinde verilen önermeyi aşağıdaki adımları matematik yazılımında gerçekleştirerek grafiksel olarak doğrulayınız.

1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan a sürgüsünü tanımlayarak aralığı -5 ile 5 olarak seçiniz.

2. adım: Giriş bölümüne $f(x) = \sin x$ yazınız.

3. adım: Giriş bölümüne $g(x) = \cos\left(x + \frac{a\pi}{2}\right)$ yazınız.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.

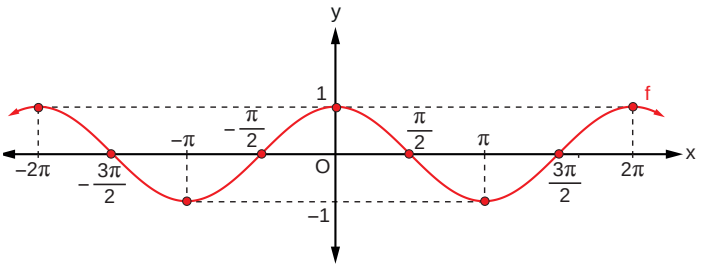


Matematiksel ispat yapmayı gerektiren Çalışma Kağıdı'na, Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na ve Öz Değerlendirme Formu'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

9. 8. soruda kullandığınız grafik ile doğrulama veya cebirsel ispat yöntemlerinin olumlu ya da olumsuz yönleri üzerine sınıf arkadaşlarınız ile tartışınız. Bu yöntemleri kullanarak gerçek sayılarda $g(x) = 3 \cdot \sin x + 4$ şeklinde tanımlı g trigonometrik fonksiyonunun nitel özelliklerinden periyodunun ve sıfırlarının sayısının grafik ile doğrulamasını ve cebirsel ispatını yapınız. Bu yöntemleri kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

Sıra Sizde 4

Grafiği verilen $f: \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \cos x$ **şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonu için aşağıdaki soruları cevaplayınız.**

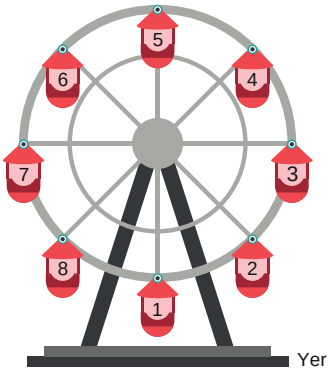


1. **f referans fonksiyonuna ait grafiğin y ekseninin pozitif yönünde 3 birim ötelenmesiyle g fonksiyonu oluşur. Buna göre g fonksiyonunun grafiğini çiziniz ve cebirsel temsilini altına yazınız.**

2. **f trigonometrik referans fonksiyonuna ait bağımsız değişkenin katsayısının 2 olması sonucunda elde edilen h fonksiyonunun grafiğini çiziniz ve cebirsel temsilini altına yazınız.**

3. **f trigonometrik referans fonksiyonunun grafiğinin önce y ekseninin pozitif yönünde 3 birim ötelenmesi daha sonra bağımsız değişkeninin katsayısının 2 olması sonucunda elde edilen k fonksiyonunun grafiğini çiziniz ve cebirsel temsilini altına yazınız.**

8. Örnek

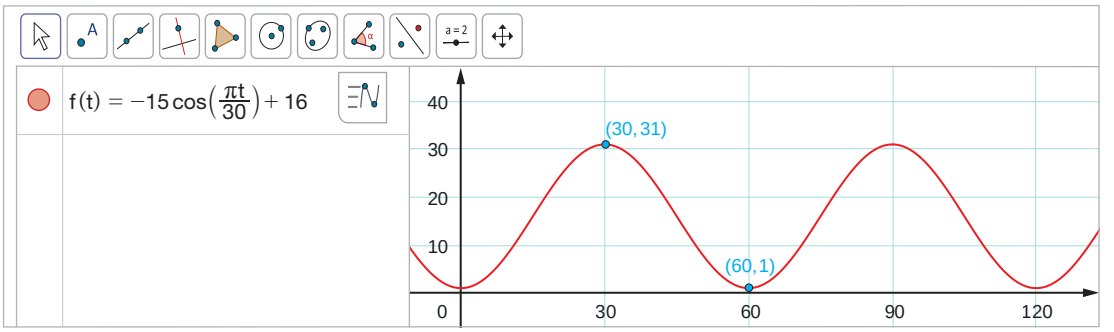


Görseldeki 15 metre yarıçap uzunluğuna sahip dönme dolap, pozitif yönde dönmektedir. Dönme dolabın 1 numaralı kabininin bağlantı noktasının yerden yüksekliği zamana bağlı olarak değişmektedir. Geçen zaman saniye cinsinden t dir. Kabinin bağlantı noktasının yerden yüksekliği ise metre cinsinden $f(t) = -15 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{30}\right) + 16$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonu ile modellenmektedir.

Buna göre f trigonometrik fonksiyonunun nitel özelliklerini bulunuz.

Çözüm

Fonksiyonun tanım kümesi $[0, \infty)$ olur. $-1 \leq \cos t \leq 1$ olduğu için dönme dolabın 1 numaralı kabininin bağlantı noktası yerden en az $-15 \cdot 1 + 16 = 1$ metre, en çok $-15 \cdot (-1) + 16 = 31$ metre yükseklige ulaşabilir. Fonksiyonun görüntü kümesi [1,31] olur. Fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir.



$f(x) = k \cdot \cos(ax + b) + m$ $(k, a, b, m \in \mathbb{R}, k \neq 0, a \neq 0)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun periyodu $T = \frac{2\pi}{|a|}$ şeklinde hesaplanır. f foksiyonun periyodu $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{30}} = 60$ olur.

Dönme dolabın kabinin bağlantı noktasının yerden yüksekliği daima pozitif olacağı için fonksiyonun işareti de daima pozitiftir.

Kabinin bağlantı noktasının yerden yüksekliği 0 ile 30. saniyeler arasında artmakta, 30 ile 60. saniyeler arasında azalmaktadır. Bu sebeple fonksiyon $[0, 30]$ nda artan, $[30, 60]$ nda azalan olur. Genelleştirilirse $k \geq 0$ tam sayı olmak üzere $[60k, 60k + 30]$ nda fonksiyon artan, $[60k + 30, 60k + 60]$ nda fonksiyon azalan olur.

Kabinin bağlantı noktasının yerden yüksekliği 30. saniyede en yüksek değerine ulaşır. Fonksiyon periyodik olduğu için $k \geq 0$ tam sayı olmak üzere $x = 60k + 30$ için fonksiyon maksimum değerine ulaşır. Kabinin bağlantı noktasının yerden yüksekliği 0. saniyede en düşük değerindedir. Fonksiyon periyodik olduğu için $k \geq 0$ tam sayı olmak üzere $x = 60k$ için fonksiyon minimum değerindedir.

Kabinin bağlantı noktasının yerden yüksekliği hiçbir zaman sıfır olamaz. Dolayısıyla fonksiyonun sıfırı yoktur.

Kabinin bağlantı noktası aynı yüksekliğe farklı zamanlarda ulaşabilmektedir. Bu yüzden fonksiyon bire bir değildir.

Kabinin bağlantı noktası, 1 ile 31 metre arasındaki her yüksekliğe ulaşabilmektedir. Bu yüzden $f: [0, \infty) \rightarrow [1, 31]$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu örtendir.

Fonksiyon sadece $k \geq 0$ için tanımlı olduğundan tek ya da çift fonksiyon değildir.

Sıra Sizde 5

Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonuna uygun dönüşümler yapılarak elde edilen $[-4, 4]$ nda $g(x) = 1 + 2\cos 3x$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun grafiğini çizerek aşağıdaki soruları cevaplayınız. Bu işlemler için matematik yazılımlarından yararlanınız.

1. **Bire bir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.**

2. **Pozitif ve negatif olduğu aralıkları bulunuz.**

3. **Artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.**

4. **Maksimum-minimum noktası ve değerini bulunuz.**

5. **Sıfırlarını bulunuz.**

6. **Periyodunu bulunuz.**

7. **Tek ya da çift olup olmadığını inceleyiniz.**

7. Uygulama

f: $\mathbb{R} - \left\{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ Şeklinde Tanımlı Trigonometrik Referans Fonksiyonundan Türetilen $g(x) = k \cdot f(mx + r) + s$ $(k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ Trigonometrik Fonksiyonunun Nitel Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

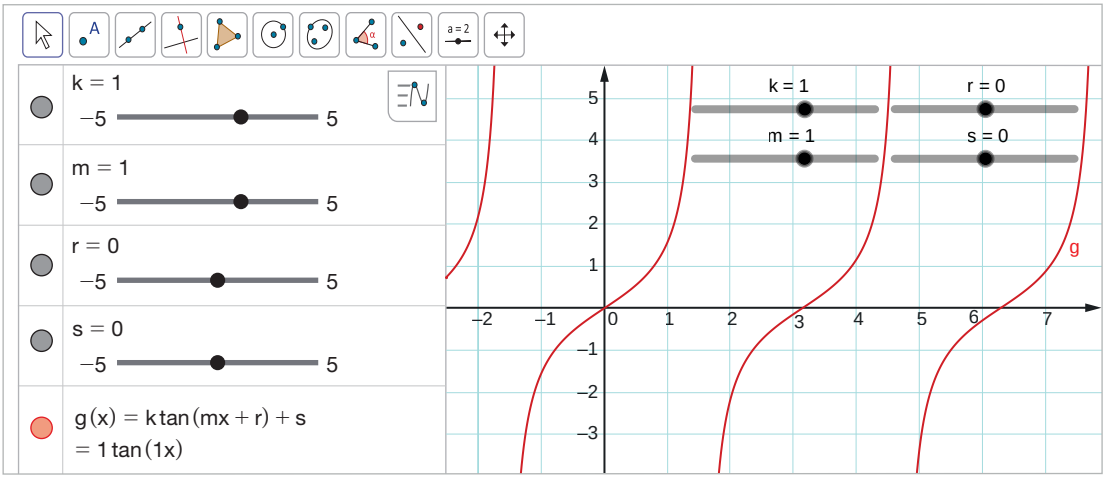
1. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

   1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan k, m, r ve s sürgülerini tanımlayarak aralığı -5 ile 5 olarak seçiniz.

   2. adım: Cebir menüsünde yer alan **Giriş** bölümüne $g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$ yazınız.

   3. adım: Sürgüleri $k = 1, m = 1, r = 0, s = 0$ seçerek $f(x) = \tan x$ trigonometrik referans fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



a) $m = 1, r = 0, s = 0, k \neq 0$ iken k sürgüsüne Tablo 1'deki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Fonksiyon İsmi	k Sürgüsünün Değeri	Oluşan Tanjant Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$	Tanjant Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Tanjant Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 3$	$h(x) = 3 \cdot \tan x$	Her bir bağımsız değişkenine karşılık gelen değeri 3 ile çarpma	3 kat dikey germe
n	$k = -2$			
t	$k = 5$			
p	$k = -1$			

b) $m = 1, r = 0, k \neq 0$ iken k ve s sürgüsüne Tablo 2'deki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 2

Fonksiyon İsmi	k ve s Sürgüsünün Değeri	Oluşan Tanjant Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$	Tanjant Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Tanjant Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1$ ve $s = 2$	$h(x) = \tan x + 2$	Her bir bağımsız değişkene karşılık gelen fonksiyon değerine 2 ekleme	y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme
n	$k = -1$ ve $s = 3$			
t	$k = 2$ ve $s = -1$			
p	$k = -2$ ve $s = -\frac{1}{3}$			

c) $m \neq 0$ ve $r = 0$ iken k, s ve m sürgüsüne Tablo 3'teki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3

Fonksiyon İsmi	k, s ve m Sürgüsünün Değeri	Oluşan Tanjant Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$	Tanjant Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Tanjant Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1, s = 0$ ve $m = 3$	$h(x) = \tan 3x$	Her bir bağımsız değişkeni 3 ile çarpma	3 kat yatay sıkıştırma
n	$k = 1, s = 1$ ve $m = 1$			
t	$k = 2, s = 0$ ve $m = -2$			
p	$k = 4, s = \frac{1}{3}$ ve $m = \frac{1}{4}$			

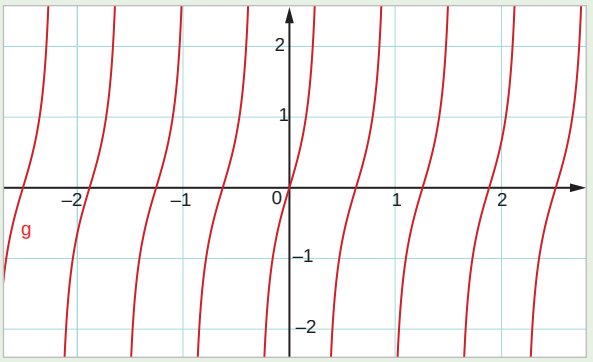
ç) $m \neq 0$ ve $k \neq 0$ iken k, s, m ve r sürgüsüne Tablo 4'teki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 4

Fonksiyon İsmi	k, s, m ve r Sürgüsünün Değeri	Oluşan Tanjant Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$	Tanjant Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Tanjant Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1, s = 3,$ $m = 1$ ve $r = 2$	$h(x) = \tan(x + 2) + 3$	Her bir bağımsız değişkenin 2 fazlasının fonksiyon değerine 3 ekleme	x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim öteleme
n	$k = 1, s = 0,$ $m = 1$ ve $r = 4$			
t	$k = 3, s = -1,$ $m = 2$ ve $r = -1$			
p	$k = -1, s = 1,$ $m = -2$ ve $r = 0$			

2. Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlı f trigonometrik referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümler sonucunda elde edilen tanjant fonksiyonlarının cebirsel ve grafik temsilini bularak Tablo 5'i örnekteki gibi doldurunuz. Fonksiyonların grafik temsillerini matematik yazılımlarını kullanarak oluşturunuz.

Tablo 5

f Fonksiyonunun Grafiğine Uygulanan Dönüşüm	Cebirsel Temsil	Grafik Temsili
5 kat yatay sıkıştırma	$g(x) = \tan 5x$	
y eksenine göre yansıma ve x ekseni boyunca negatif yönde 3 birim öteleme		
x eksenine göre yansıma, y ekseni boyunca negatif yönde 1 birim öteleme		

3. $f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlı f trigonometrik referans fonksiyonun nitel özelliklerinden hareketle Tablo 6 ve Tablo 7'de cebirsel temsili verilen tanjant fonksiyonlarının nitel özellikleri ile ilgili varsayımlarınızı örnekteki gibi ifade ediniz.

Tablo 6

$h: [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, h(x) = -1 + 2 \cdot \tan x$	
Nitel Özellikler	**Varsayımlar**
Tanım Kümesi	Tanım kümesi $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ dır.
Görüntü Kümesi	
Bire birliği	
Örtenliği	
Periyodu	
Sıfırları	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlığı-Azalanlığı	
Teklik-Çiftlik	

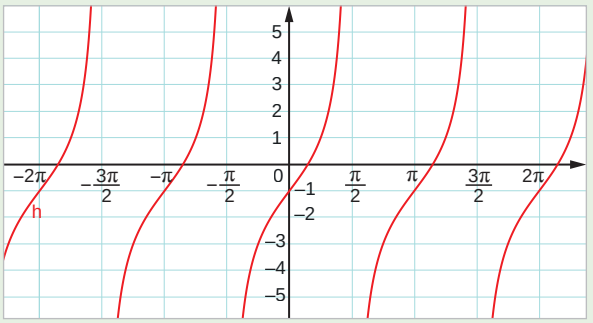
Tablo 7

$g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s (k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$	
Nitel Özellikler	**Varsayımlar**
Tanım Kümesi	Tanım kümesi $\mathbb{R} - \left\{-\frac{r}{m} + (2k+1)\frac{\pi}{2m}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
Görüntü Kümesi	
Bire birliği	
Örtenliği	
Periyodu	
Sıfırları	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlığı-Azalanlığı	
Teklik-Çiftlik	

4. Aşağıda $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonundan türetilmiş bazı fonksiyonlar verilmiştir.

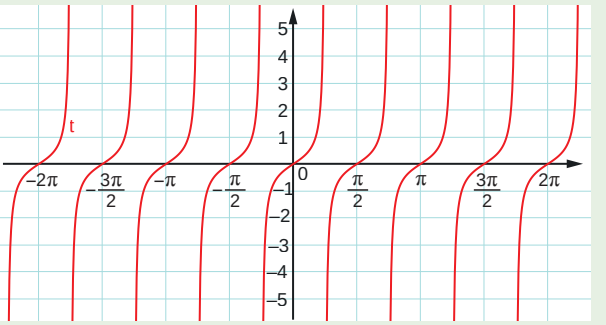
a) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz. Tablo 8'i örnekteki gibi doldurunuz.

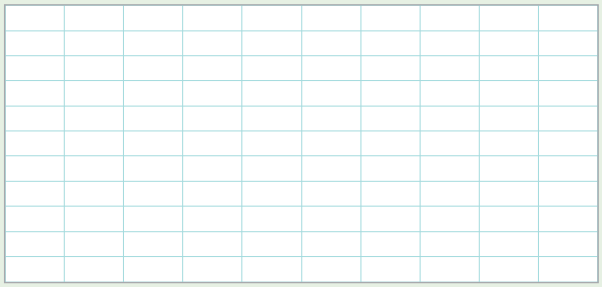
Tablo 8

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$h(x) = -1 + 2 \cdot \tan x$	Grafik		
		Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun $\frac{\pi}{2}$ de tanımsız olduğu görülür. h fonksiyonu periyodik olduğundan tanjant fonksiyonu $\forall x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ için tanımsız olur. Tanım kümesi $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ olur.	Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun görüntü kümesinin $\mathbb{R}$ olduğu görülür.
	Cebirsel	f trigonometrik referans fonksiyonu $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ de tanımlıdır. $h(x) = 2 \cdot f(x) - 1 = 2 \cdot \tan x - 1$ olduğu için h fonksiyonunun da tanım kümesi $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ olur.	f trigonometrik referans fonksiyonun görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dır. $h(x) = 2 \cdot f(x) - 1 = 2 \cdot \tan x - 1$ olduğu için h fonksiyonunun da görüntü kümesi $\mathbb{R}$ olur.
$n(x) = \tan(x-1) + 2$	Grafik		
	Cebirsel		

b) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz. Tablo 9'u örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 9

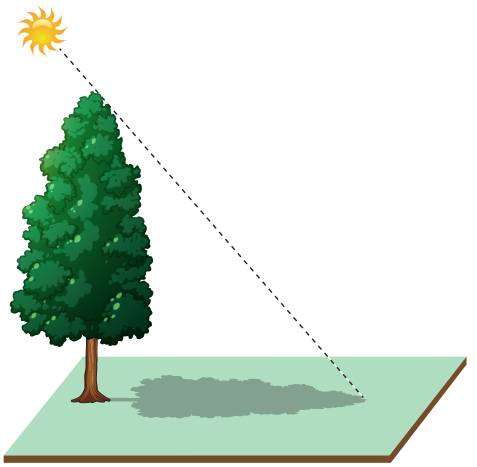
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Periyot	Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar
$t(x) = \frac{1}{3} \cdot \tan 2x$	Grafik			
		Grafik incelendiğinde t fonksiyonunun periyodik olduğu görülür. f trigonometrik referans fonksiyonunun periyodu π dir. t fonksiyonunun grafiği, f fonksiyonunun grafiğinin 2 kat yatay sıkıştırılmış şeklidir. Bu durumda t fonksiyonunun periyodu referans fonksiyonun periyodunun $\frac{1}{2}$'si olur. Bu sebeple t fonksiyonunun periyodu $\frac{\pi}{2}$ olur.	t fonksiyonunun maksimum-minimum noktası ve değeri yoktur.	Grafik incelendiğinde t fonksiyonunun tanım aralığının her noktasında artan fonksiyon olduğu görülür.
	Cebirsel	$g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$ trigonometrik fonksiyonunun grafiği, m gerçek sayısının mutlak değerine bağlı olarak yatay sıkıştırma ve germeye sebep olur. Bu nedenle periyot $T = \frac{\pi}{\lvert m \rvert}$ şeklinde hesaplanır. t fonksiyonunun periyodu $m = 2$ için $T = \frac{\pi}{2}$ olur.		$t(x) = \frac{1}{3} \cdot f(2x) = \frac{1}{3} \cdot \tan 2x$ olduğu için t fonksiyonunun grafiği, f fonksiyonu gibi tanım aralığında artan olur. Buna göre t fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ için artan olur.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Periyot	Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar
$p(x) = -\tan 3x + 1$	Grafik			
	Cebirsel			

5. 3. soruda yapılan çalışmalardan elde ettiğiniz nitel özelliklere ait varsayımlarınızı kullanarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f trigonometrik referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$ $(k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

6. Oluşturduğunuz varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f trigonometrik referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot \tan(mx + r) + s$ $(k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz. Oluşturduğunuz önermeleri sözel veya cebirsel olarak ifade ediniz.

7. Aşağıdaki soruları çözünüz. Elde ettiğiniz önermelerin gerçek yaşam bağlamındaki kullanışlılığını değerlendiriniz.



Yanda bir ağacın öğle vaktindeki görseli verilmiştir. Ağacın 12.00 ile 16.00 arasında oluşan gölge boyunun (m) zamana bağlı (sa.) değişimi, $f(t) = 6 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{12}(t-12)\right) + 2$ şeklinde tanımlanan tanjant trigonometrik fonksiyonu ile modellenmiştir.

Buna göre

a) Ağacın gölge boyunun en kısa olduğu saati ve değeri bulunuz.

b) Ağacın gölge boyunu veren f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

8. Aşağıdaki önermeleri cebirsel olarak ispatlayınız veya grafiksel olarak doğrulayınız. İspatınızı cebirsel olarak gerçekleştirirken mantık bağlaçlarını ve niceleyicileri, ispatın sistematikliğini ve matematiksel kesinliğini yansıtacak şekilde kullanınız.

a) "$g: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, g(x) = 5 \cdot \tan 3x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon tek fonksiyondur." önermesinin ispatı ile ilgili verilen aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Önermenin Sözel İspatı	Önermenin Cebirsel İspatı
$g(x) = 5 \cdot \tan 3x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonda bağımsız değişkenin toplama işlemine göre tersi alınarak elde edilen yeni fonksiyonun cebirsel temsili bulunur.	
Elde edilen fonksiyonda tek fonksiyon olma şartının cebirsel temsili kullanılarak fonksiyon dönüşümü sağlanır.	
Elde edilen son cebirsel temsil, g fonksiyonu türünden ifade edilir.	
$-g(x) = g(-x)$ olduğu gösterilerek ispat tamamlanır.	

b) "$\forall x \in \mathbb{R}$ için $\tan x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ olur." şeklinde verilen önermeyi aşağıdaki adımları matematik yazılımında gerçekleştirerek grafiksel olarak doğrulayınız.

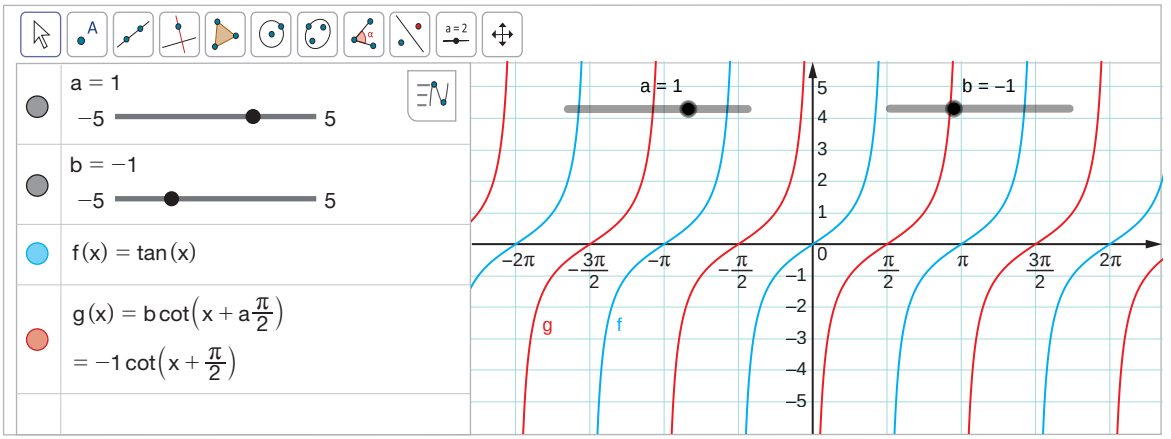
1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan a ve b sürgülerini tanımlayarak aralığı -5 ile 5 olarak seçiniz.

2. adım: $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için **Giriş** bölümüne $f(x) = \tan x$ yazınız.

3. adım: Aynı işlemi $g(x) = b \cdot \cot\left(x + a \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için de yapınız.

Oluşan trigonometrik fonksiyonların grafiklerini inceleyerek grafiklerdeki değişimleri gözlemleyiniz.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



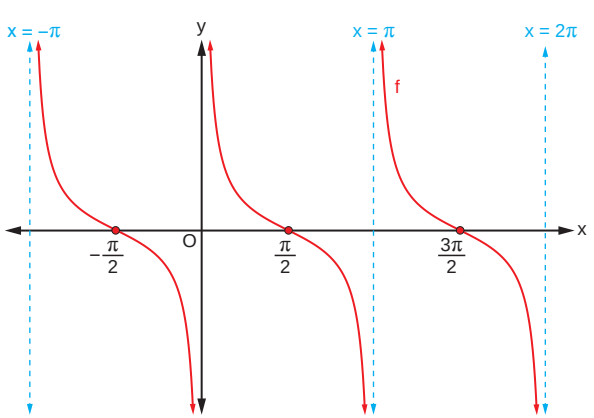
9. Doğrulama yöntemlerinizi kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

9. Örnek

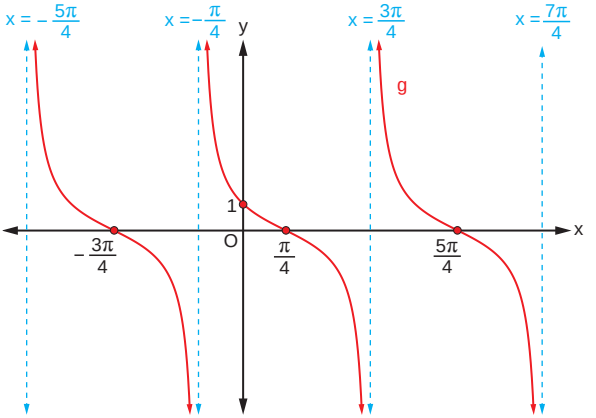
Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonun grafik temsili üzerinden yapılan dönüşümlerle elde edilen $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Bu fonksiyonun grafik temsili ile cebirsel temsili arasındaki ilişkiyi ifade ediniz.

Çözüm

Öncelikle Grafik 1'de yer alan f trigonometrik referans fonksiyonunun grafiğine x ekseni boyunca negatif yönde $\frac{\pi}{4}$ birim öteleme yapılmasıyla oluşturulan $g(x) = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği, Grafik 2'deki gibi elde edilir.

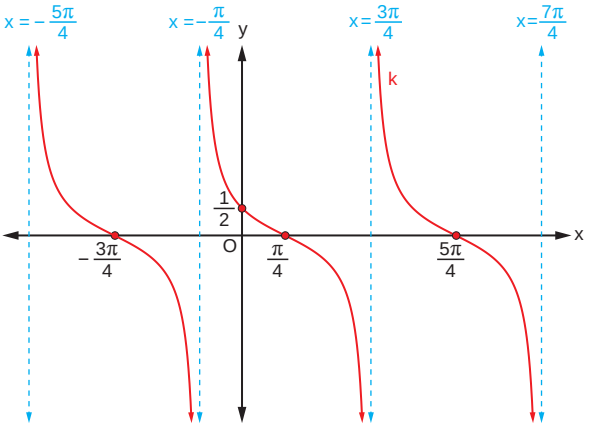


Grafik 1



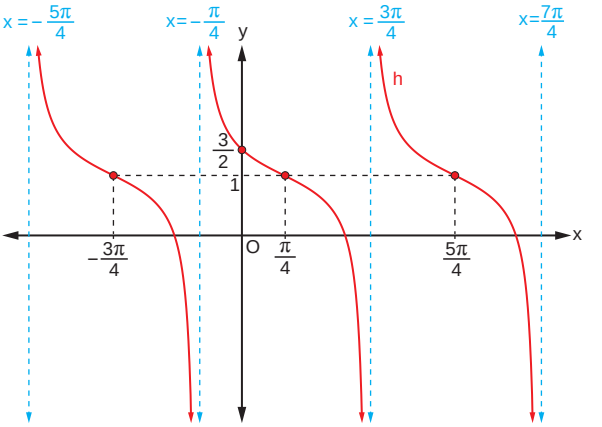
Grafik 2

Grafik 2'deki g fonksiyonunun değerlerinin $\frac{1}{2}$ katının alınmasıyla oluşturulan $k(x) = \frac{1}{2} \cdot \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiği Grafik 3'teki gibi elde edilir.



Grafik 3

Grafik 3'teki k fonksiyonunun grafiğini y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim ötelenmesiyle oluşturulan $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiği Grafik 4'teki gibi elde edilir.

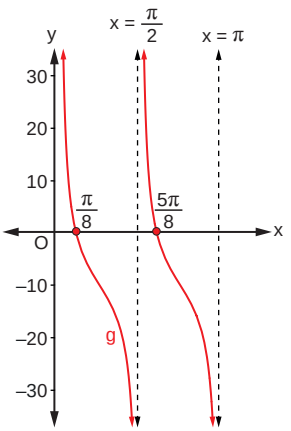


Grafik 4

10. Örnek

Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonun grafiğine uygun dönüşümler yapılarak elde edilen $g(x) = 4 \cdot \cot 2x - 4$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun $(0, \pi)$ nda nitel özelliklerini bulunuz.

Çözüm



Yandaki g fonksiyonunun grafik temsili incelendiğinde tanım kümesinin $(0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ olduğu görülür. Fonksiyon tüm gerçek sayı değerlerini alabilir. Bu nedenle g fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir. Fonksiyonun periyodu grafikten görüldüğü üzere $\frac{\pi}{2}$ dir. Grafik incelendiğinde g fonksiyonunun azalan olduğu görülür. g fonksiyonun sıfırları $x = \frac{\pi}{8}$ ve $x = \frac{5\pi}{8}$ olur. g fonksiyonunun grafiği incelendiğinde $\left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ ve $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}\right)$ nda işaretinin pozitif, $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $\left(\frac{5\pi}{8}, \pi\right)$ nda işaretinin negatif olduğu görülür. g fonksiyonunun tanım aralığında maksimum ve minimum noktası yoktur. g fonksiyonu grafikte $(0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ nda örten fonksiyondur ama bire bir fonksiyon değildir.

Sıra Sizde 6

Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonun grafiğine uygun dönüşümler yapılarak elde edilen $(0, 3]$ nda $g(x) = 1 - \sqrt{3}\cot x$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun grafiğini çizerek aşağıdaki soruları cevaplayınız. Bu işlemler için matematik yazılımlarından yararlanınız.

1. **Bire bir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.**

2. **Pozitif ve negatif olduğu aralıkları bulunuz.**

3. **Artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.**

4. **Maksimum-minimum noktası ve değerini bulunuz.**

5. **Sıfırını bulunuz.**

6. **Periyodunu bulunuz.**

7. **Tek ya da çift olup olmadığını inceleyiniz.**

Araştırma Ödevi

Aşağıdaki görevleri gerçekleştirerek araştırma ödevini öğretmeninizin belirlediği süre içerisinde eksiksiz olarak tamamlayınız.

- Trigonometrik fonksiyonların periyotlarını gerçek yaşam durumlarıyla ilişkilendiren örnek problem durumlarını araştırınız.
- Belirlediğiniz gerçek yaşam durumuna uygun fonksiyonların bağımlı ve bağımsız değerlerini içeren bir tablo oluşturunuz.
- Tablodaki veriler yardımıyla fonksiyonun cebirsel temsilini oluşturup grafiğini çiziniz.
- Gerçek yaşam durumunu yansıtması amacıyla oluşturduğunuz fonksiyonun periyodunu bulunuz.
- Yaptığınız çalışmanın tüm aşamalarını içeren bir rapor hazırlayıp sınıf arkadaşlarınıza sununuz.
- Çalışmanız analitik dereceli puanlama anahtarı kullanılarak öğretmeniniz tarafından değerlendirilecektir.

Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

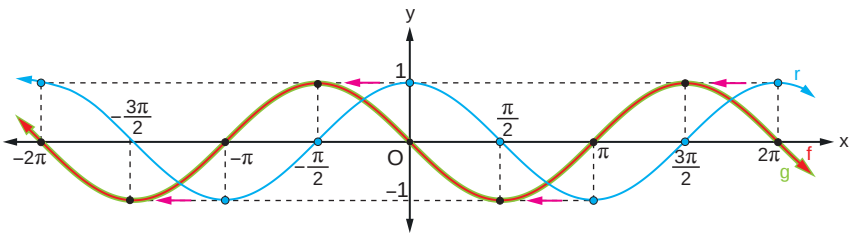
11. Örnek

Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $g(x) = -\sin x$, $h(x) = \sin(\pi + x)$, $m(x) = \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ ve $n(x) = -\cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonların grafik temsillerini kullanarak aşağıdaki eşitlikleri doğrulayınız.

1. $f(x) = g(x)$ **2.** $h(x) = g(x)$ **3.** $m(x) = n(x)$

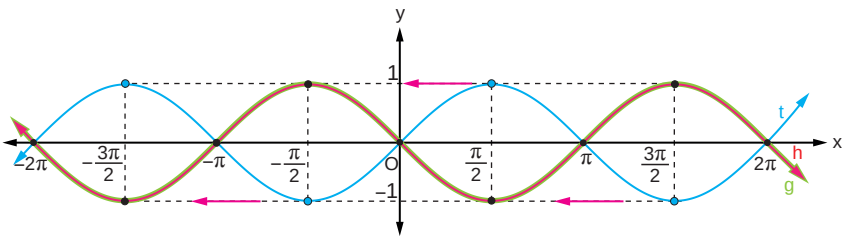
Çözüm

1.



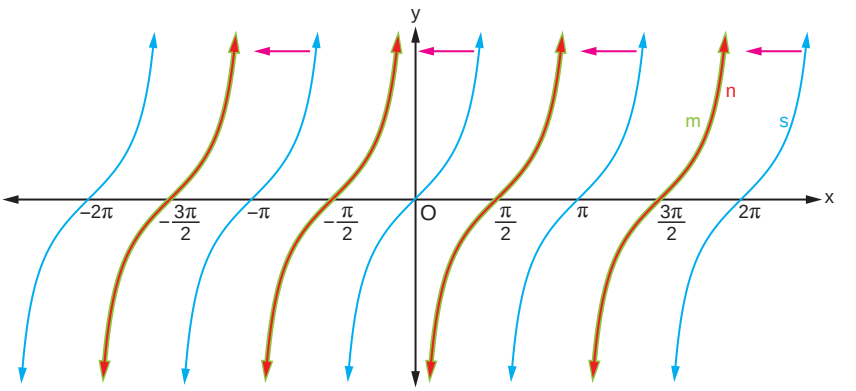
Grafik incelemesi yapıldığında $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun $r(x) = \cos x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonunun x ekseni boyunca $\frac{\pi}{2}$ birim negatif yönde ötelenmiş hâli olduğu ve $g(x) = -\sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiğiyle çakıştığı görülür.

2.



Grafik incelemesi yapıldığında $h(x) = \sin(\pi + x)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun $t(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonun x ekseni boyunca π birim negatif yönde ötelenmiş hâli olduğu ve $g(x) = -\sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiğiyle çakıştığı görülür.

3.



Grafik incelemesi yapıldığında $m(x) = \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun $s(x) = \tan x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonun x ekseni boyunca $\frac{3\pi}{2}$ birim pozitif yönde ötelenmiş hâli olduğu ve $n(x) = -\cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiğiyle çakıştığı görülür.

12. Örnek

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = \frac{4 \cdot \cos 2x - 3}{5}$ şeklinde tanımlı g trigonometrik fonksiyonunun görüntü kümesinin $\left[-\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right]$ olduğunu mantık bağlaçları ve niceleyicilerden yararlanarak cebirsel olarak ispatlayınız.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $h(x) = 2 \cdot \sin 5x$ şeklinde tanımlı h fonksiyonunun $[0, 2\pi)$ nda 10 tane sıfırı olduğunu cebirsel temsil ve grafik temsilinden yararlanarak doğrulayınız.

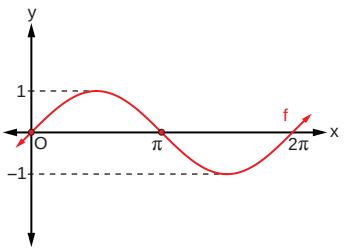
Çözüm

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \cos x$ trigonometrik referans fonksiyonunun görüntü kümesi $[-1, 1]$ dır. Buradan eşitsizlik üzerinde işlemler yapılarak g fonksiyonu elde edilir. Buna göre

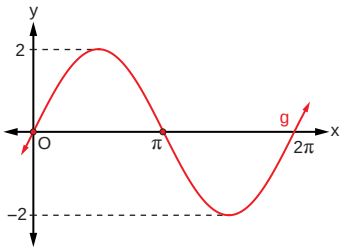
   $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 4 \cdot \cos 2x \leq 4$

   $-7 \leq 4 \cdot \cos 2x - 3 \leq 1 \Rightarrow -\frac{7}{5} \leq \frac{4 \cdot \cos 2x - 3}{5} \leq \frac{1}{5}$ olur. Buradan g trigonometrik fonksiyonunun görüntü kümesi $\left[-\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right]$ olarak bulunur.

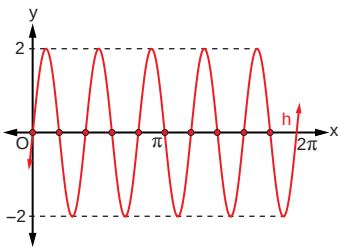
2. Fonksiyonun cebirsel temsili kullanılarak doğrulanması için öncelikle h trigonometrik fonksiyonunun periyodu bulunur. $f(x) = k \cdot \sin(ax + b) + m, (k, a, b, m \in \mathbb{R}, k \neq 0$ ve $a \neq 0)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun periyodu $T = \frac{2\pi}{|a|}$ şeklinde hesaplanır. Buna göre h trigonometrik fonksiyonunun periyodu $T = \frac{2\pi}{5}$ bulunur. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \sin x$ trigonometrik referans fonksiyonunun $[0, 2\pi)$ ndaki sıfırlarının sayısı 2'dir. $h(x) = 2 \cdot \sin 5x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi)$ ndaki sıfırlarının sayısı 5 katına çıkarak 10 olur. Fonksiyonun grafik temsili kullanılarak elde edilen gösterimi aşağıdaki gibidir.



f(x) = sin x grafiği



g(x) = 2 · sin x grafiği



h(x) = 2 · sin 5x grafiği

Grafiklerden görüldüğü üzere h fonksiyonunun sıfırları $\forall x \in \mathbb{R}$ için $[0, 2\pi)$ nda 10 tanedir.

Sıra Sizde 7

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 2 \cdot \cos(4x + 5)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun $[0, 2\pi)$ nda 8 tane sıfırı olduğunu grafik temsillerinden yararlanarak gösteriniz.

Kontrol Noktası

sin x	**1.** a, b, k ve r $\in \mathbb{R}$ ($a \neq 0, k \neq 0, b > 0$ ve $r > 0$) olmak üzere $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot \sin(a(x + b)) + r$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilirken şu adımlar uygulanır: 1. adım: $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonu x ekseninin negatif yönünde b birim ötelenerek $m(x) = \sin(x + b)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 2. adım: $m(x) = \sin(x + b)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği $\lvert a\rvert$ değeri arttıkça yatayda sıkıştırılarak, $\lvert a\rvert$ değeri azaldıkça yatayda gerilerek $n(x) = \sin(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 3. adım: $n(x) = \sin(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun değerlerini k katına eşleyen $s(x) = k \cdot \sin(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 4. adım: $s(x) = k \cdot \sin(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon, y ekseni boyunca pozitif yönde r birim ötelenerek $g(x) = k \cdot \sin(a(x + b)) + r$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir.
	2. a, b, k ve r $\in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$ ve $k \neq 0$) olmak üzere gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = k \cdot \sin(a(x + b)) + r$ trigonometrik formunda verilen fonksiyonun nitel özellikleri • Tanım kümesi R, görüntü kümesi $[r - \lvert k\rvert, r + \lvert k\rvert]$dır. • Periyodu $\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$ dır ve fonksiyon bire bir değildir. • Maksimum değeri $r + \lvert k\rvert$ ve minimum değeri $r - \lvert k\rvert$ dır.
cos x	**1.** a, b, k ve r $\in \mathbb{R}$ ($a \neq 0, k \neq 0, b > 0$ ve $r > 0$) olmak üzere $f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot \cos(a(x + b)) + r$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilirken şu adımlar uygulanır: 1. adım: $f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonu x ekseninin negatif yönünde b birim ötelenerek $m(x) = \cos(x + b)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 2. adım: $m(x) = \cos(x + b)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği $\lvert a\rvert$ değeri arttıkça yatayda sıkıştırılarak, $\lvert a\rvert$ değeri azaldıkça yatayda gerilerek $n(x) = \cos(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 3. adım: $n(x) = \cos(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun değerlerini k katına eşleyen $s(x) = k \cdot \cos(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 4. adım: $s(x) = k \cdot \cos(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon, y ekseni boyunca pozitif yönde r birim ötelenerek $g(x) = k \cdot \cos(a(x + b)) + r$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir.
	2. a, b, k ve r $\in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$ ve $k \neq 0$) olmak üzere gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = k \cdot \cos(a(x + b)) + r$ trigonometrik formunda verilen fonksiyonun nitel özellikleri • Tanım kümesi R, görüntü kümesi $[r - \lvert k\rvert, r + \lvert k\rvert]$ dır. • Periyodu $\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$ dır ve fonksiyon bire bir değildir. • Maksimum değeri $r + \lvert k\rvert$ ve minimum değeri $r - \lvert k\rvert$ dır.

tan x	**1.** a, b, k ve $r \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0, k \neq 0, b > 0$ ve $r > 0$) olmak üzere $f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot \tan(a(x + b)) + r$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun grafiği çizilirken şu adımlar uygulanır: 1. adım: $f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonu x ekseninin negatif yönünde b birim ötelenerek $m(x) = \tan(x + b)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 2. adım: $m(x) = \tan(x + b)$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun grafiği $\lvert a \rvert$ değeri arttıkça yatayda sıkıştırılarak, $\lvert a \rvert$ değeri azaldıkça yatayda gerilerek $n(x) = \tan(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 3. adım: $n(x) = \tan(a(x + b))$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun değerlerini k katına eşleyen $s(x) = k \cdot \tan(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 4. adım: $s(x) = k \cdot \tan(a(x + b))$ şeklinde tanımlı fonksiyonu y ekseni boyunca pozitif yönde r birim ötelenerek $g(x) = k \cdot \tan(a(x + b)) + r$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir.
	2. a, b, k ve $r \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$ ve $k \neq 0$) olmak üzere gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = k \cdot \tan(a(x + b)) + r$ trigonometrik formunda verilen fonksiyonun nitel özellikleri • Tanım kümesi $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{a} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + t \cdot \pi\right) - b, t \in \mathbb{Z}\right\}$, görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir. • Örten fonksiyondur ve bire bir fonksiyon değildir. • Periyodu $\frac{\pi}{\lvert a \rvert}$ dır. Maksimum ve minimum değeri yoktur.
cot x	**1.** a, b, k ve $r \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0, k \neq 0, b > 0, r > 0$ ve $k > 0$) olmak üzere $f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot \cot(a(x + b)) + r$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun grafiği çizilirken şu adımlar uygulanır: 1. adım: $f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlı trigonometrik referans fonksiyonu x ekseninin negatif yönünde b birim ötelenerek $m(x) = \cot(x + b)$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 2. adım: $m(x) = \cot(x + b)$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun grafiği $\lvert a \rvert$ değeri arttıkça yatayda sıkıştırılarak, $\lvert a \rvert$ değeri azaldıkça yatayda gerilerek $n(x) = \cot(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 3. adım: $n(x) = \cot(a(x + b))$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun değerlerini k katına eşleyen $s(x) = k \cdot \cot(a(x + b))$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir. 4. adım: $s(x) = k \cdot \cot(a(x + b))$ şeklinde tanımlı fonksiyonu y ekseni boyunca pozitif yönde r birim ötelenerek $g(x) = k \cdot \cot(a(x + b)) + r$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği çizilir.
	2. a, b, k ve $r \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$ ve $k \neq 0$) olmak üzere gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = k \cdot \cot(a(x + b)) + r$ trigonometrik formunda verilen fonksiyonun nitel özellikleri • Tanım kümesi $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{a} \cdot t \cdot \pi - b, t \in \mathbb{Z}\right\}$, görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir. • Örten fonksiyondur ve bire bir fonksiyon değildir. • Periyodu $\frac{\pi}{\lvert a \rvert}$ dır. Maksimum ve minimum değeri yoktur.

Ek soruların yer aldığı 3. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Trigonometrik Referans Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonlar ve Nitel Özellikleri)

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki boşlukları kutularda verilen ifadelerden uygun olanlarla doldurunuz.

1	Pozitif	-1	Negatif	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

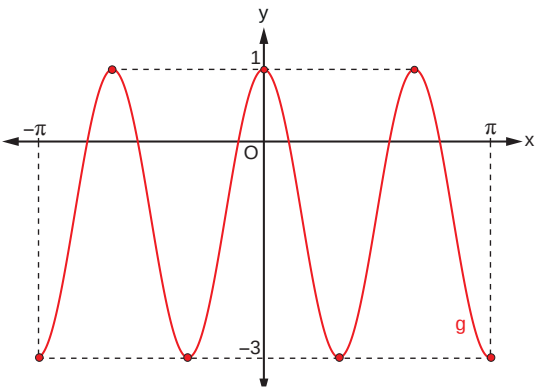
a) Başlangıç noktası, birim çemberdeki x ekseni üzerinde ve ölçüsü $-\frac{\pi}{2}$ olan yayın bitim noktasının koordinatları toplamı ..... olur.

b) $A\left(-\frac{1}{2}, k\right)$ noktası birim çember üzerinde olduğuna göre k nin pozitif değeri ..... olur.

c) Birim çember üzerinde alınan her noktanın koordinatlarının kareleri toplamı ..... olur.

ç) Ölçüsü -220° olan açı ..... yönlüdür.

2.



Yanda $f(x) = \cos x$ trigonometrik referans fonksiyonuna uygun dönüşümler yapılarak elde edilen $[-\pi, \pi]$ nda $g(x) = 2 \cdot \cos 3x - 1$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon verilmiştir.

Buna göre g fonksiyonu için verilen

I. Bire bir fonksiyondur.

II. Sıfırları 6 tanedir.

III. Maksimum değeri 1'dir.

IV. Periyodu $\frac{2\pi}{3}$ dir.

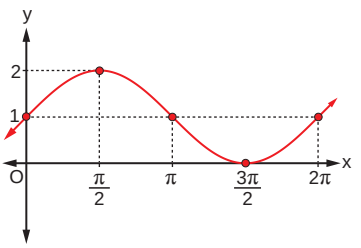
ifadelerinden hangileri doğrudur?

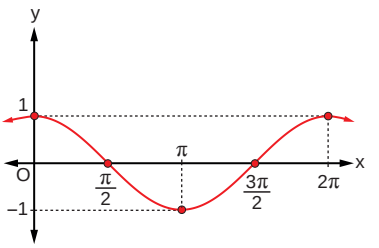
3. x ve y birer gerçek sayı olmak üzere $A = 3 \cdot \sin x - 1$ ve $B = 2 \cdot \cos y + 5$ biçiminde tanımlanıyor.
Buna göre 2A − 5B ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

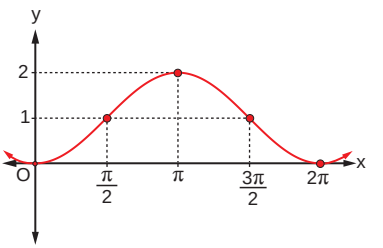
4. Aşağıda gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = \sin x$ trigonometrik referans fonksiyonundan dönüştürülen dört fonksiyon verilmiştir.

I. $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **II.** $f(x) + 1$ **III.** $1 + 2f(\pi - x)$ **IV.** $1 - f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Bu fonksiyonların cebirsel temsillerini grafiklerin altlarında yer alan boşluklara yazınız.



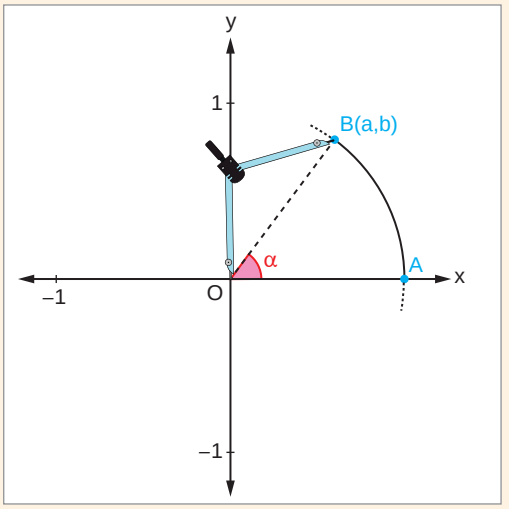




3.2. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARLA İFADE EDİLEBİLEN DENKLEMLER İÇEREN PROBLEMLER

Konuya Başlarken

Bir ucu orijine sabitlenmiş olan pergel kullanılarak 1 birim yarıçap uzunluğunda çember çizilecektir. Şekil 3.2'de verilen pergel, A noktasından başlanarak B(a, b) noktasında biten bir yay oluşturulması için pozitif yönde α açı ölçüsü kadar döndürülmektedir.



Şekil 3.2: *Pergel ve AB yayı*

Buna göre

1. **B noktasından başlanarak pozitif yönde çizime devam edildiğinde B noktası ile aynı ordinata sahip ilk nokta C noktası olmaktadır. Buna göre BC yayını çizerek C nin koordinatlarını α türünden ifade ediniz.**

2. **B ve C noktalarına çizilen yarıçapların x ekseni ile oluşturduğu pozitif yönlü açı ölçülerinin sinüs değerlerini karşılaştırarak yorumlayınız.**

3. **C noktasından başlanarak pozitif yönde çizime devam edildiğinde sırasıyla x ve y eksenlerine uzaklıkları B noktası ile aynı olan ilk nokta D noktası olmaktadır. DC yayını çizerek D nin koordinatlarını α türünden ifade ediniz.**

4. **D ve B noktalarına çizilen yarıçapların x ekseni ile oluşturduğu pozitif yönlü açı ölçülerinin tanjant değerlerini karşılaştırınız ve yorumlayınız.**

5. **A noktasından başlanarak negatif yönde çizime devam edildiğinde B noktası ile aynı apsise sahip ilk nokta E noktası olmaktadır. BE yayını çizerek E nin koordinatlarını α türünden ifade ediniz.**

6. **E ve B noktalarına çizilen yarıçapların x ekseni ile oluşturduğu pozitif yönlü açı ölçülerinin kosinüs değerlerini karşılaştırınız ve yorumlayınız.**

8. Uygulama

Trigonometrik Referans Fonksiyonlardan Türetilebilen Fonksiyonlarla Oluşturulan Denklemler

Aşağıda gerçek yaşam durumlarında kullanılan trigonometrik fonksiyonları içeren sorular bulunmaktadır. Öğretmeniniz rehberliğinde beşer kişilik gruplar oluşturunuz. Aşağıdaki problem durumunu inceleyiniz.

2022 yılında tamamlanan görseldeki 1915 Çanakkale Köprüsü, çelik asma yapısı ve zarif kirişleriyle Çanakkale Boğazı'nda yer almaktadır.



Mühendislik harikası olarak kabul edilen bu yapı, dünyanın en uzun orta açıklıklı köprüsüdür. Köprü tabliyesinin orta noktası, rüzgâr ve araç geçişinin etkisiyle dikey titreşim yapmaktadır. Kış ve yaz mevsiminde yapılan ölçümler; köprü tabliyesinin yaz mevsiminde denge pozisyonundan 20 cm yukarıya ve 20 cm aşağıya doğru, kış mevsiminde denge pozisyonundan 10 cm yukarıya ve 10 cm aşağıya doğru sabit hareketle titreştiğini göstermektedir. Her bir titreşim hareketi 6 saniyede tamamlanmaktadır. Köprüdeki bu hareket sırasında enerji kaybı yaşanmadığı varsayılmaktadır.

Başlangıçta denge konumunda bulunan köprünün yaptığı titreşim hareketiyle köprü tabliyesinin dikey konumunun (m) zamana (sa.) bağlı değişimini yaz mevsiminde modelleyen fonksiyon f, kış mevsiminde modelleyen fonksiyon ise g olmaktadır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. 1915 Çanakkale Köprüsü'nün tabliyesinin denge konumuna göre dikey mesafesinin süreye bağlı değişimini ifade eden f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bulunuz.

2. f ve g fonksiyonlarının sıfırları ve periyotlarını bulunuz. Bulduğunuz değerlerin problem bağlamındaki anlamını ifade ediniz.

3. **a)** Köprü tabliyesinin denge konumuna göre dikey mesafesinin aynı olduğu süreyi gösteren $f = g$ denkleminin cebirsel ve grafik temsilini bulunuz. Grafik temsillerini ifade ederken matematik yazılımlarından yararlanınız.

b) a maddesinde elde ettiğiniz temsilleri kullanarak f ve g fonksiyonlarının periyotlarının f = g denkleminin çözümü bağlamındaki anlamını ifade ediniz.

4. Elde ettiğiniz ve yorumladığınız farklı temsillerden yararlanarak problemin çözümü için bir strateji oluşturunuz.

5. Çözüm stratejinizi kullanarak problemi çözünüz.

6. Matematik yazılımı yardımıyla problemin çözümünden elde ettiğiniz denkleme ait grafikleri aşağıdaki adımları gerçekleştirerek çiziniz.

1. adım: Giriş bölümüne f fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

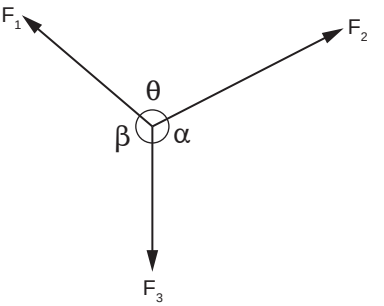
2. adım: Giriş bölümüne g fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

Grafiklerden yararlanarak problemin çözümünü doğrulayınız.

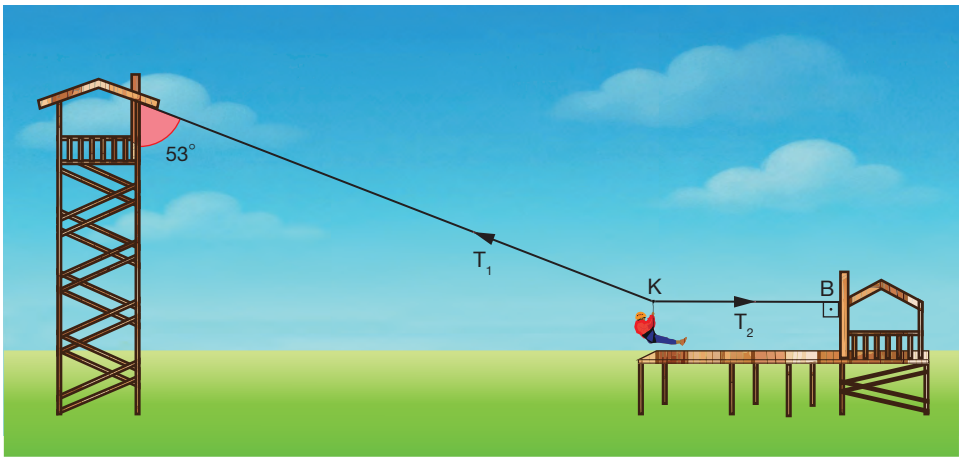
7. Problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri karşılaştırarak çözümlerinizi doğrulayınız. Hangi yöntemin daha kullanışlı olduğunu açıklayınız.

8. Problemin çözümünde kullanılabilecek olası çözüm stratejilerini belirleyiniz. Bu stratejilerin iki fonksiyonun birbiri ile ilişkisini içeren başka problemlerin çözümünde nasıl kullanılabileceği ile ilgili çıkarımlarda bulunuz. Elde ettiğiniz çıkarımları matematiksel modele dönüştürerek sonraki sayfada bulunan gerçek yaşam durumu probleminde uygulayınız.

Kesişen kuvvetlerin etkisindeki bir cisimde sırasıyla F_1, F_2 ve F_3 ile α, β ve θ nın sinüs değerlerinin oranı birbirine eşit olduğunda cisim dengede kalır.



T.C. Gençlik ve Spor Bakanlığı tarafından düzenlenen gençlik kamplarından birine katılan Deniz, doğa kampında yer alan ip parkuru etkinliğini gerçekleştirmek için görselde verilen yüksek platforma çıkmaktadır. Deniz'in ip üzerinde hareketsiz durabilmesi, üzerine etki eden kuvvetlerin yukarıdaki denge koşulunu sağlamasına bağlıdır.



Tüm güvenlik önlemleri alındıktan sonra ip ile bağlantısı sağlanan Deniz, kayarak bulunduğu noktadan daha alçaktaki diğer platforma doğru hareket ediyor. Kütlesi 60 kg olan Deniz, K noktasında sabit bir şekilde dengede kaldığına göre ip üzerinde oluşan T_1 gerilim kuvvetinin T_2 gerilim kuvvetinden kaç newton daha fazla olduğunu bulunuz. ($\sin 53^\circ \approx 0,8$ ve $\sin 37^\circ \approx 0,6$ ve $g \approx 10\,m/sn.^2$)

9. Çıkarımlarınızın geçerliliğini sözel, cebirsel ve grafiksel olarak değerlendiriniz.

Trigonometrik fonksiyonlarla ifade edilebilen denklemleri içeren Çalışma Kağıdı'na, Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na ve Akran Değerlendirme Formu'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

13. Örnek

Bir cismin gölge boyu, cismin boyuna, bulunduğu konuma ve güneş ışınlarının geliş açısının ölçüsüne bağlıdır. Güneş ışınlarının düşme açısının ölçüsü x olmak üzere A ülkesinde bulunan h_1 boyundaki cismin gölge boyu $f(x) = a + h_1 \cdot \cot x \ (a \in \mathbb{R})$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon ile B ülkesinde bulunan h_2 boyundaki cismin gölge boyu $g(x) = b + h_2 \cdot \cot x \ (b \in \mathbb{R})$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon ile modellenmiştir. Aşağıda bazı açı ölçülerinin derece ve radyan türünden değerleri ile bu ölçülere bağlı kotanjant referans fonksiyonunun yaklaşık değerleri verilmiştir.

x	Derece	58°	59°	60°	61°	62°	63°	64°	65°
	Radyan	1,012	1,03	1,047	1,064	1,082	1,099	1,116	1,133
cot x		0,625	0,6	0,577	0,554	0,532	0,5	0,488	0,47

Güneş ışınlarının düşme açısının ölçüsünün 45° olduğu bir anda A ülkesinde bulunan cismin gölge boyu 104 cm, B ülkesinde bulunan cismin gölge boyu 100 cm olmaktadır. Güneş ışınlarının düşme açısının ölçüsünün 63° olduğu başka bir anda ise A ülkesinde bulunan cismin gölge boyu 54 cm, B ülkesinde bulunan cismin gölge boyu 55 cm olmaktadır.

Buna göre

1. f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bulunuz.
2. A ve B ülkesinde bulunan cisimlerin gölge boylarının eşit olmasını sağlayan x açı ölçüsünün kaç radyan olduğunu cebirsel ve grafik temsilinden yararlanarak bulunuz.

Çözüm

1. Güneş ışınlarının düşme açısının ölçüsü 45° olduğunda gölge boyları sırasıyla $f(45°) = 104$ cm ve $g(45°) = 100$ cm, güneş ışınlarının düşme açısının ölçüsü 63° olduğunda gölge boyları sırasıyla $f(63°) = 54$ cm ve $g(63°) = 55$ cm olur.

   Öncelikle $\cot 45° = 1, \cot 63° \backsimeq 0,5$ değerleri kullanılarak f fonksiyonunun cebirsel temsilinin bulunabilmesi için $a + h_1 = 104$ ve $a + h_1 \cdot \frac{1}{2} = 54$ denklemleri ortak çözülür. Buradan $a = 4$, $h_1 = 100$ cm bulunur.

   Buna göre f fonksiyonunun cebirsel temsili $f(x) = 4 + 100 \cdot \cot x$ olarak bulunur.

   Benzer işlemler g fonksiyonunun cebirsel temsilini bulmak için tekrarlanır. $\cot 45° = 1$, $\cot 63° \backsimeq 0,5$ değerleri kullanılarak $b + h_2 = 100$ ve $b + h_2 \cdot \frac{1}{2} = 55$ denklemleri ortak çözülür. Buradan $b = 10, h_2 = 90$ cm bulunur.

   Buna göre g fonksiyonunun cebirsel temsili $g(x) = 10 + 90 \cdot \cot x$ olarak bulunur.

2. A ve B ülkelerinde bulunan cisimlerin gölgelerinin boylarının eşit olması için $f(x) = g(x)$ olmalıdır. Buna göre $4 + 100 \cdot \cot x = 10 + 90 \cdot \cot x$

   $$10 \cdot \cot x = 6$$

   $$\cot x = \frac{6}{10} \text{ bulunur.}$$

   Tablodaki kotanjant referans fonksiyonu değerlerinden yararlanılarak x açı ölçüsü 1,03 radyan olarak bulunur.

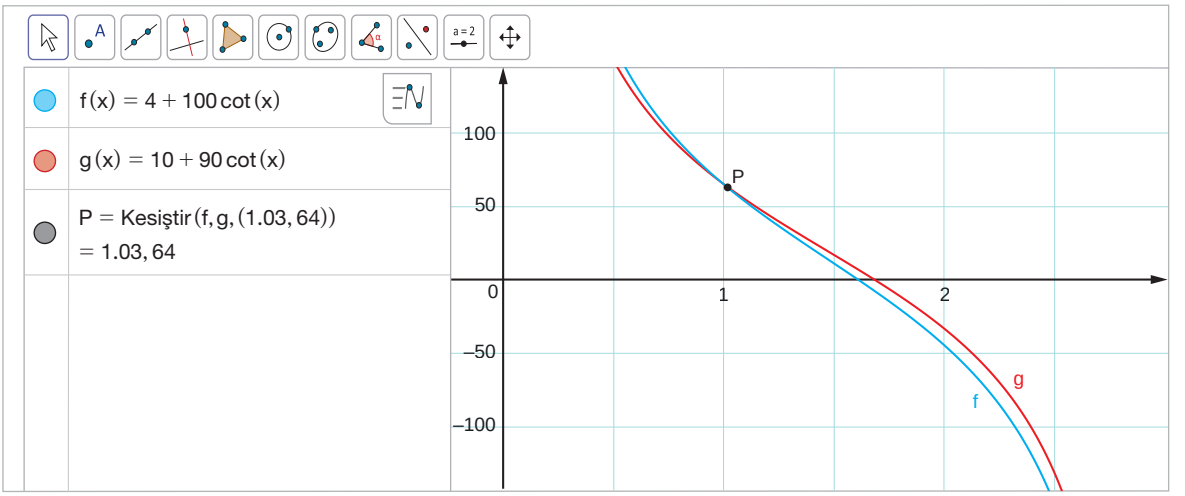
Bu problem durumu çözümünün grafik temsili ile yapılabilmesi için matematik yazılımında aşağıdaki adımlar gerçekleştirilir.

1. adım: Giriş bölümüne $f(x) = 4 + 100 \cdot \cot x$ yazınız.

2. adım: Giriş bölümüne $g(x) = 10 + 90 \cdot \cot x$ yazınız.

3. adım: Araçlar sekmesinden **Kesiştir** aracı seçilip f ve g fonksiyonlarının üstüne tıklandığında fonksiyonların kesiştiği noktayı bulunuz.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



f ve g fonksiyon grafiklerinin kesişim noktasının apsis değerinin problem bağlamındaki anlamı, A ve B ülkesinde bulunan cisimlerin gölge boylarının eşit olması için güneş ışınlarının düşme açısının ölçüsü 1,03 radyan olması gerektiğidir.

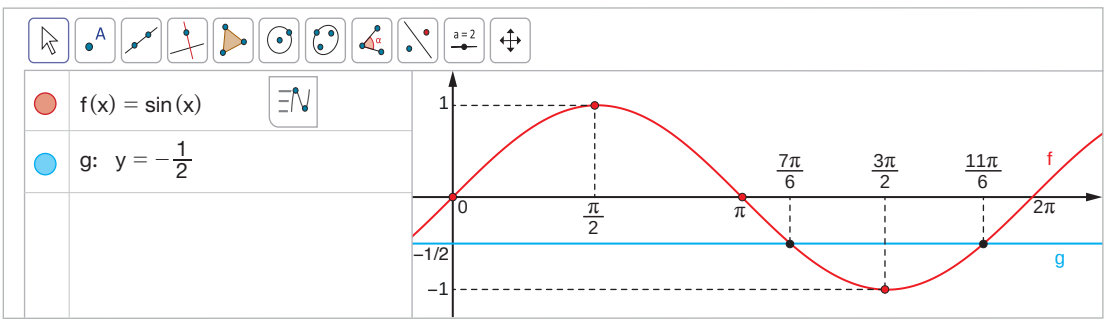
14. Örnek

$\forall x \in [0, 2\pi)$ olmak üzere $2 \cdot \sin x + 1 = 0$ denklemi veriliyor. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Grafik temsillerinden yararlanarak denklemin çözüm kümesini bulunuz.
2. Cebirsel temsillerden yararlanarak denklemin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

1.



Görselde grafik temsili verilen $y = \sin x$ eğrisi ile $y = -\frac{1}{2}$ doğrusunun kesişim noktaları $2 \cdot \sin x + 1 = 0$ denkleminin köklerini verir. Buna göre denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ olarak bulunur.

2. $2\sin x + 1 = 0$ denkleminden $\sin x = -\frac{1}{2}$ elde edilir. $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ olur. Bütünler iki açının sinüs değerleri birbirine eşittir. Buna göre $\sin x = \sin\frac{7\pi}{6}$ veya $\sin x = \sin\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right)$ yazılır. Sinüs trigonometrik referans fonksiyonunun periyodu 2π dir. Çözüm kümesi elde edilirken bu periyot kullanılır. $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ya da $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ elde edilir. Buna göre çözüm kümesi $Ç = \left\{x: x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur. $x \in [0, 2\pi)$ için çözüm kümesi $Ç = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ olarak bulunur.

Sıra Sizde 8

1. $x \in [0, 2\pi)$ olmak üzere $2 \cdot \cos x - \sqrt{2} = 0$ denklemi veriliyor.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Grafik temsilinden yararlanarak denklemin çözüm kümesini bulunuz.

b) Cebirsel temsil kullanarak denklemin çözüm kümesini bulunuz.

2. $\cos 4x = \sin 2x + \frac{1}{2}$ **denkleminin** $[0, 2\pi)$**nda kaç farklı kökü olduğunu grafik temsilinden yararlanarak bulunuz.**

15. Örnek

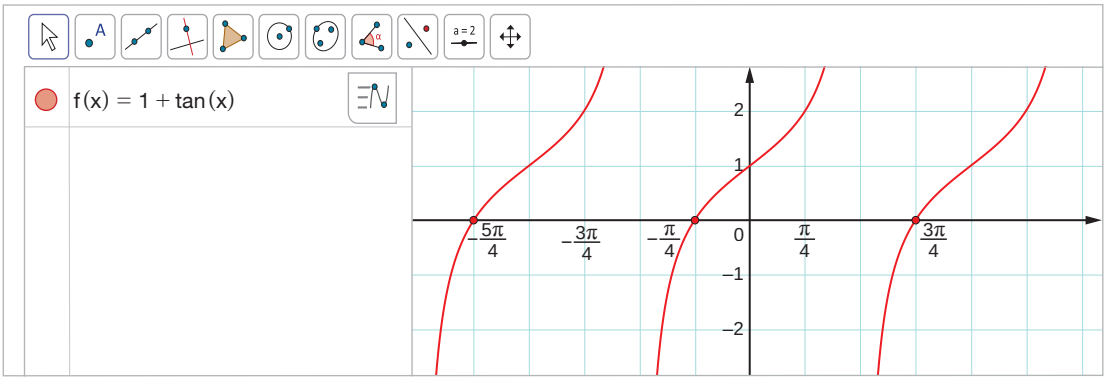
Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = \tan x + 1$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon veriliyor. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Grafik temsilinden yararlanarak f fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz.

2. Cebirsel temsil kullanarak $f(x) = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

1.



Görselde grafik temsili verilen $y = \tan x + 1 = 0$ eğrisinin x ekseni ile kesişim noktaları f fonksiyonunun sıfırlarını verir. Tanjant fonksiyonunun periyodu π olduğundan denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ olur.

2. $f(x) = 2$ denklemi düzenlenirse $\tan x = 1$ elde edilir. $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ olduğundan $\tan x = \tan\frac{\pi}{4}$ eşitliği elde edilir. Tanjant trigonometrik referans fonksiyonunun periyodu π dir. Çözüm kümesi elde edilirken bu periyot kullanılır. Buradan $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ elde edilir. Buna göre çözüm kümesi $Ç = \left\{x: x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur.

16. Örnek

$\tan 4x = \cot 5x$ denkleminin çözüm kümesini cebirsel yöntemler kullanarak bulunuz.

Çözüm

Birbirinden farklı trigonometrik fonksiyonlar içeren denklemlerde eşitliğin iki tarafı da aynı trigonometrik fonksiyona dönüştürülür.

$\cot\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ olduğundan $\tan 4x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$ şeklinde yazılabilir. $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$4x = \frac{\pi}{2} - 5x + k\pi \Rightarrow 9x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9}$ elde edilir. Buna göre çözüm kümesi

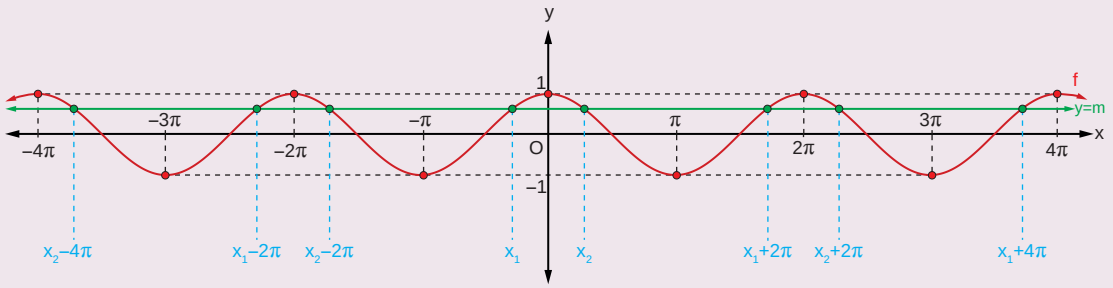
$Ç = \left\{x: x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur.

Sıra Sizde 9

Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = 2 \cdot \cot x + 5$ trigonometrik fonksiyonunun $[-2\pi, 2\pi)$ ndaki sıfırlarının sayısını trigonometrik denklemlerin çözümü için oluşturulan stratejilerden yararlanarak bulunuz.

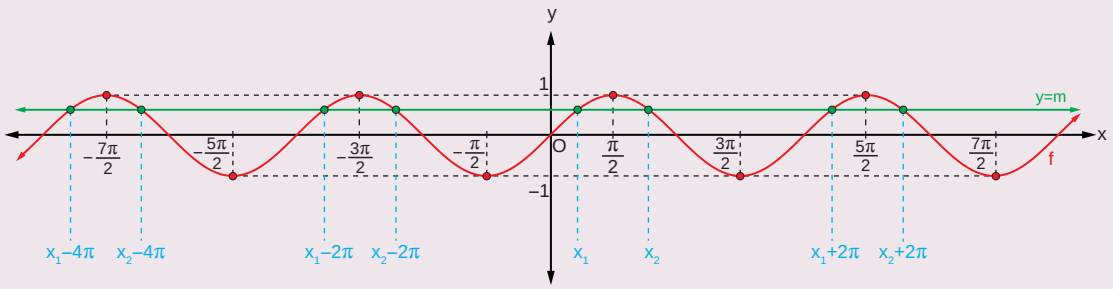
Konu ile ilgili videoya yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Kontrol Noktası

- 

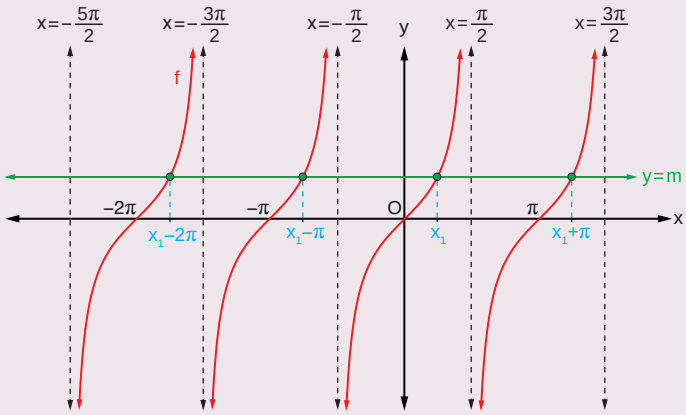
Grafik incelendiğinde m gerçek sayısı için $\cos x = m$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere denklem her $x = x_1 + 2k\pi$ ve $x = x_2 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ gerçek sayısı için aynı değeri verir. Kosinüs referans fonksiyonu çift fonksiyon olduğundan $x_2 = -x_1$ olur. Buna göre

$m \in [-1, 1]$ için denklemin çözüm kümesi $Ç = \{x: x = x_1 + 2k\pi \vee x = -x_1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
$m \notin [-1, 1]$ için denklemin çözüm kümesi $Ç = \emptyset$ olur.

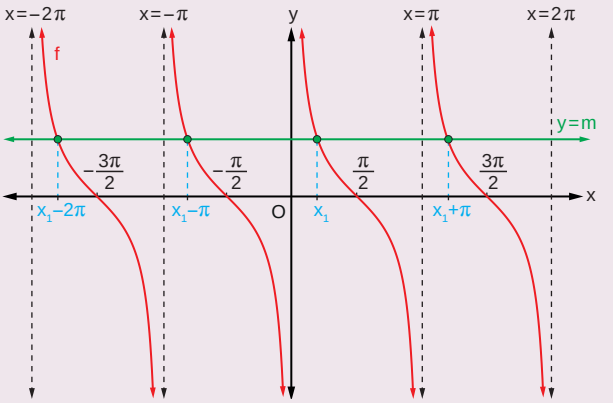
- 

Grafik incelendiğinde m gerçek sayısı için $\sin x = m$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere denklem her $x = x_1 + 2k\pi$ ve $x = x_2 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ gerçek sayısı için aynı değeri verir. Sinüs referans fonksiyonunun grafiği incelenerek $x_1 + x_2 = \pi$ eşitliği elde edilir. Buna göre

$m \in [-1, 1]$ için denklemin çözüm kümesi $Ç = \{x: x = x_1 + 2k\pi \vee x = \pi - x_1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
$m \notin [-1, 1]$ için denklemin çözüm kümesi $Ç = \emptyset$ olur.

- 

Grafik incelendiğinde m gerçek sayısı için $\tan x = m$ denkleminin kökü x_1 olmak üzere denklemin her $x = x_1 + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ gerçek sayısı için aynı değeri verdiği görülür. Buna göre $m \in \mathbb{R}$ için denklemin çözüm kümesi $Ç = \{x: x = x_1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ olur.



Grafik incelendiğinde m gerçek sayısı için $\cot x = m$ denkleminin kökü x_1 olmak üzere denklemin her $x = x_1 + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$ gerçek sayısı için aynı değeri verdiği görülür. Buna göre $m \in \mathbb{R}$ için denklemin çözüm kümesi $Ç = \{x: x = x_1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ olur.

Alıştırmalar

1. $2 \cdot \sin 4x - \sqrt{3} = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

2. $x \in [0, 4\pi)$ **olmak üzere** $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$ **denkleminin çözüm kümesinin kaç elemanlı olduğunu bulunuz.**

3. $x \in (0, 2\pi)$ **nda** $\cos^2 2x - 6 \cdot \sin 2x + 3 = 1 - \sin^2 2x$ **denklemini sağlayan x değerlerini bulunuz.**

4. $\tan\frac{x}{2} \cdot \cot 4x = 1$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

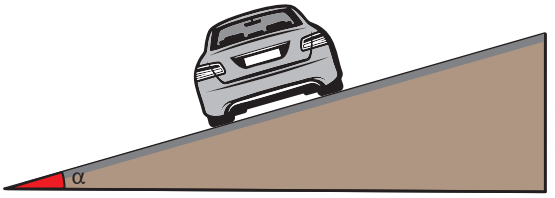
Ek soruların yer aldığı 4. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.
(İçerik: Trigonometrik Referans Fonksiyonlardan Türetilebilen Fonksiyonlarla Oluşturulan Denklemler)

3. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

Aşağıda temaya ait farklı türlerde 14 adet soru yer almaktadır.

1-11. bilgi ve becerileri ölçen soruları cevaplayınız.

1. Görseldeki sürtünmesiz eğimli viraj üzerinde V (m/sn.) hızıyla hareket eden araç, savrulmamak için güvenli hız limitine uymalıdır.



Güvenli hız limiti $V = \sqrt{\tan\alpha \cdot g \cdot r}$ ile hesaplanır. Burada α eğim açısının ölçüsü, g yer çekimi ivmesi ve r virajlı yolun yarıçap uzunluğudur. Eğim açısı ölçüsünün en az 5°, en fazla 10° olması planlanan bir yol için tanjant değerleri tablosu aşağıda verilmiştir. ($g \backsimeq 10\,m/sn.^2$)

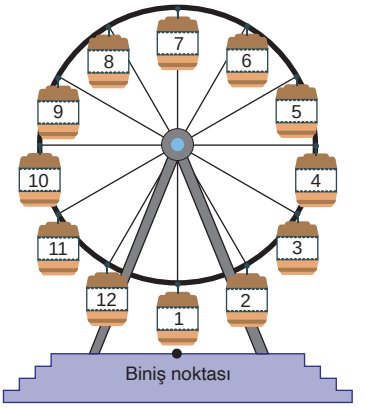
$\tan\alpha$	Yaklaşık Değer	$\tan\alpha$	Yaklaşık Değer
$\tan 5°$	0,08	$\tan 8°$	0,14
$\tan 6°$	0,11	$\tan 9°$	0,16
$\tan 7°$	0,12	$\tan 10°$	0,17

Buna göre

a) Yarıçap uzunluğu 90 m olan bir virajda güvenli hız limitinin 12 m/sn. olması için virajın kaç derecelik eğimle yapılması gerektiğini bulunuz.

b) Yarıçap uzunluğu 120 m olan bir viraj, 7° lik eğimle yapılıyor. Bu eğimli viraj için güvenli hız limitinin kaç m/sn. olduğunu bulunuz.

2. Bir eğlence merkezinde bulunan dönme dolapta eşit aralıklarla yerleştirilmiş 12 adet kabin bulunmaktadır.



Dönme dolabın bir tam turu 120 saniyede tamamlanmaktadır.

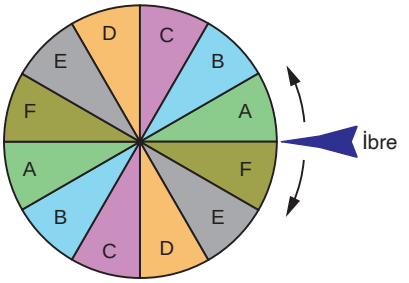
Buna göre

a) Buse 6 numaralı kabine bindikten 40 sn. sonra biniş noktasında duran Can'ın önünden geçebilecek kabin numaralarını bulunuz.

b) Pozitif yönde dönmekte olan dönme dolabın 6. kabinine binen Buse'nin 9. kabinin başlangıçta bulunduğu konuma 3. kez gelmesi için dönme dolabın kaç derece dönmesi gerektiğini bulunuz.

c) Negatif yönde dönmekte olan dönme dolapta Can 1. kabine, Buse ise 5. kabine binmiştir. Buse ve Can'ın ilk kez yatayda aynı hizaya gelmeleri için dönme dolabın kaç radyan dönmesi gerektiğini bulunuz.

3.



Aslıhan, Neslihan ve Emirhan oynayacakları bir oyunda yukarıdaki, eşit dilimlere ayrılmış çarkı döndüreceklerdir.

Her bir dilime karşılık gelen puan aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Dilim	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Puan	50	60	70	80	90	100

Döndürme hareketi sonucunda ibre hangi dilimi gösteriyorsa oyuncu ilgili dilimin puanını kazanmaktadır. Döndürme hareketi sonucunda ibre, iki dilim arasında kalırsa oyuncu bu iki dilimin puanlarının aritmetik ortalamasını kazanmaktadır. Her bir döndürme hareketinden önce çark görseldeki konuma getirilmektedir.

Buna göre

a) Aslıhan çarkı pozitif yönde 1720 derece döndürmüştür.

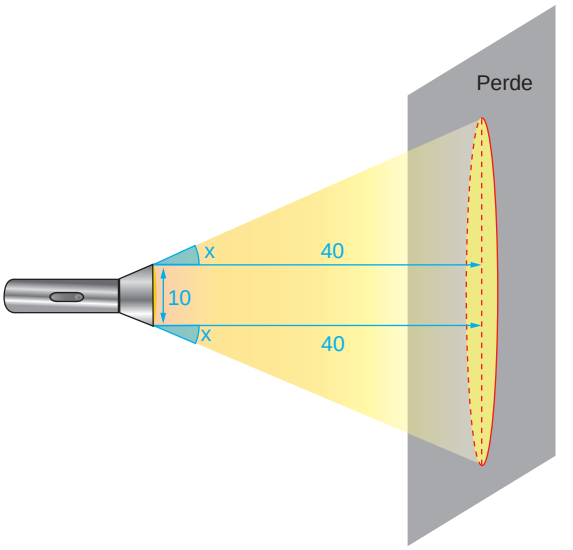
Buna göre Aslıhan'ın kaç puan kazanacağını bulunuz.

b) Neslihan çarkı negatif yönde 1560 derece döndürmüştür.

Buna göre Neslihan'ın kaç puan kazandığını bulunuz.

c) **Çarkı en fazla bir tam tur döndürmeyi ve 100 puan kazanmayı hedefleyen Emirhan'ın çarkı pozitif yönde çevirmesi gereken açının derece cinsinden ölçüsünün aralığını bulunuz.**

4. Çap uzunluğu 10 cm olan özel yapım bir el fenerinin 40 cm uzağına görseldeki gibi bir perde yerleştirilmiştir. El fenerinin yayılma açısının ölçüsü x olmak üzere x arttıkça el fenerinin perdede aydınlattığı bölgenin çap uzunluğu artmakta, ışık şiddeti ise azalmaktadır.



x açısının ölçüsüne bağlı ışık şiddetini veren fonksiyon $f(x) = 138 - 100 \cdot \tan x$ candela (cd) olarak modellenmiştir.

Aşağıda bazı açı ölçülerinin derece türünden değerleri ile bu ölçülere bağlı tanjant referans fonksiyonunun yaklaşık değerleri verilmiştir.

x	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°
tan x	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46	0,48	0,50

Buna göre

a) **$x = 22^\circ$ olduğunda el fenerinin perdede aydınlattığı bölgenin çap uzunluğunun yaklaşık kaç cm olacağını bulunuz.**

b) **El fenerinin perdede aydınlattığı bölgenin çap uzunluğu 50 cm olduğunda x in kaç derece olacağını bulunuz.**

c) **$x = 21^\circ$ iken ışık şiddetinin %10 azalması için x in kaç derece artırılması gerektiğini bulunuz.**

5. A ve B radyo istasyonlarındaki radyo vericileri, zamana bağlı olarak değişik frekanslarda sinyaller göndermektedir. Aynı anda çalıştırılan bu radyo vericileri için t, geçen zaman (saniye) olmak üzere A istasyonundaki radyo vericisinin zamana bağlı Hertz (Hz) cinsinden frekans fonksiyonu $f(t) = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) + 360$, B istasyonundaki radyo vericisinin zamana bağlı Hertz (Hz) cinsinden frekans fonksiyonu ise $g(t) = 70 \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{25}\right) + 150$ şeklinde tanımlanmıştır.

Buna göre

a) A istasyonundaki radyo vericisinin en düşük frekansı ile B istasyonundaki radyo vericisinin en yüksek frekansı arasındaki farkın kaç Hertz olduğunu bulunuz.

b) Radyo vericilerinin çalışmaya başlamasından 5 dakika sonra cihazların frekans değerleri toplamının kaç Hertz olacağını bulunuz.

c) Radyo vericilerinin yayınlarını kaydeden bir cihazın frekans değerleri incelendiğinde değerlerin belirli zaman aralıklarında kendini tekrar ettiği gözlenmiştir. A ve B istasyonlarındaki değerlerin tekrar ettiği en küçük zaman aralıklarını bulunuz.

6. Bir ayrıtının uzunluğu 30 cm olan küp şeklindeki 4 eş blok şekilde gösterildiği gibi üst üste konulmuştur.



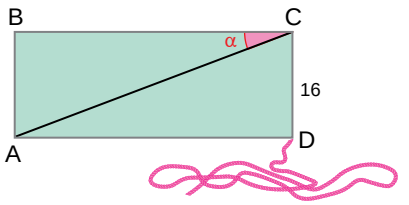
Bir ucu A noktasında sabitlenen yeşil ip; uzunluğu en kısa olacak şekilde blokların etrafına sarılarak ipin diğer ucu, taban düzlemindeki küpün bir ayrıtının üzerindeki B noktasında sabitleniyor. A noktasındaki ipin düşey ayrıt ile yaptığı açının ölçüsü x derecedir. $\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{4}{5}$ veriliyor.

Buna göre

a) B noktasının en yakın köşeye uzaklığının kaç cm olduğunu bulunuz.

b) İpin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

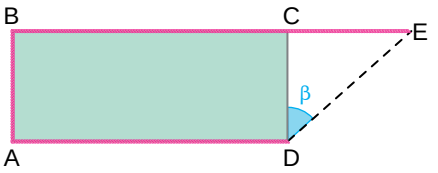
7. Şekil 1'de D köşesine bağlı ve uzunluğu 92 cm olan bir ipin bulunduğu ABCD dikdörtgeni verilmiştir.



Şekil 1

$|DC| = 16, m(\widehat{BCA}) = \alpha, \tan(180° - \alpha) = -\frac{8}{15}$

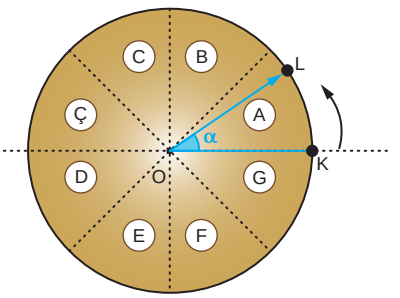
İp gergin biçimde sırasıyla A, B ve C köşelerinden geçecek şekilde dikdörtgenin etrafına sarılıyor. Sonrasında ip; Şekil 2'deki gibi B, C ve E noktaları doğrusal olmak üzere yine gergin hâle getiriliyor.



Şekil 2

Buna göre $m(\widehat{CDE}) = \beta$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

8.



Müzeyyen $a \in [0, 2\pi)$ nda aşağıdaki eşitsizliklerden en az birini sağlayan A, B, C, ... ,G bölgeleri görseldeki K noktasından başlayarak pozitif yönde $m(\widehat{KOL}) = \alpha$ açı ölçüsü kadar hareket eden [OL boya kadranı ile boyayacaktır.

I. $\sin\alpha \geq 0$

II. $\cos\alpha \geq \sin\alpha$

III. $\tan\alpha > 1$

Buna göre boya yapılmayacak bölgeyi bulunuz.

9. Bir matematik öğretmeni, öğrencisinden aşağıdaki önermeyi ispatlamasını istemiştir.

"$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 1 - 3 \cdot \sin\frac{x}{2}$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun görüntü kümesi $[-2, 4]$ dır."

Öğrenci de önermeyi altı adımda ispatlamıştır.

1. adım:

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \sin x$ trigonometrik referans fonksiyonunun görüntü kümesi $[-1, 1]$ dır. Bundan dolayı $-1 \leq \sin x \leq 1$ olur.

2. adım:

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin\frac{x}{2} \leq 1$ olur.

3. adım:

$-1 \leq \sin\frac{x}{2} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \cdot \sin\frac{x}{2} \leq 3$ olur.

4. adım:

$-3 \leq 3 \cdot \sin\frac{x}{2} \leq 3 \Rightarrow -2 \leq 3 \cdot \sin\frac{x}{2} - 1 \leq 4$ olur.

5. adım:

$-2 \leq 3 \cdot \sin\frac{x}{2} - 1 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq 1 - 3 \cdot \sin\frac{x}{2} \leq 4$ olur.

6. adım: $-2 \leq 1 - 3 \cdot \sin\frac{x}{2} \leq 4$ olduğundan g fonksiyonunun görüntü kümesi $[-2, 4]$ olur.

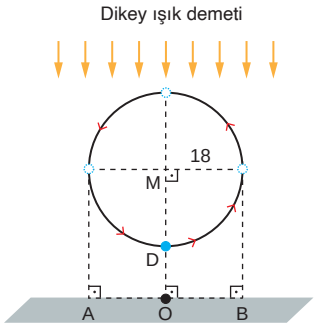
Öğretmeni ispatın yanlış olduğunu söyleyerek öğrencinin yaptığı hatayı düzeltmesini istemiştir.

Buna göre

a) Öğrenci ilk hangi adımda hata yapmıştır?

b) Öğrencinin hata yaptığı ilk adımın doğru hâlini yazınız.

10. Aşağıda yarıçap uzunluğu 18 metre olan M merkezli çember üzerindeki D noktasında bulunan bir kuşun ok yönünde sabit hızdaki hareketi gösterilmektedir.



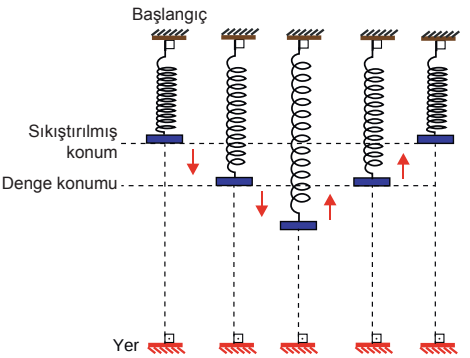
Dikey ışık demeti altında kuşun zeminde oluşturduğu gölge, [AB] üzerindeki noktalara düşmektedir. $|AO| = |OB|$ ve t, zaman (saniye) olmak üzere kuşun zeminde oluşturduğu gölgenin O noktasına olan uzaklığı (m) $f(t) = \left|a \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{k}\right)\right|$ fonksiyonu ile hesaplanmaktadır. Kuş, bir tam turu 30 saniyede tamamlamaktadır.
(Gölgenin genişliği ihmal edilecektir.)

Buna göre

a) $|a \cdot k|$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

b) **Kuşun gölgesinin O noktasına olan uzaklığı ilk kez kaçıncı saniyede $9\sqrt{3}$ metre olur?**

11. Sürtünmesiz düşey düzlemde ucuna bir cisim asılan yay, denge konumunda belli bir miktar sıkıştırıldıktan sonra serbest bırakılıyor. Cismin denge konumuna göre aşağı ve yukarı yönde hareket ettiği gözlemleniyor.



t, yayın sıkıştırılmış hâlinden sonra geçen zaman (saniye) olmak üzere cismin zamana bağlı olarak yerden yüksekliği (cm) $h(t) = 70 + 20 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ fonksiyonu ile modellenmiştir.

(Sistemde enerji kaybı olmadığı varsayılmaktadır.)

Buna göre

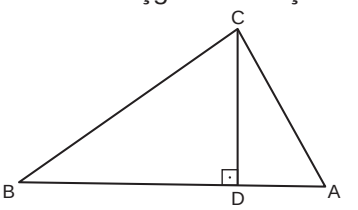
a) **Cismin ulaşabildiği en yüksek ve en alçak mesafe arasındaki farkın kaç cm olduğunu bulunuz.**

b) **Cismin serbest bırakıldıktan sonra başlangıç konumuna ilk kez kaçıncı saniyede geleceğini bulunuz.**

c) **Cismin serbest bırakıldıktan kaç saniye sonra ikinci kez yerden 70 cm yükseklikte olacağını bulunuz.**

12-14. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

12. Aşağıda bir ABC üçgeni verilmiştir.



$[CD] \perp [BA]$ olacak şekilde $D \in [BA]$ noktası verilmiştir. $m(\widehat{DBC}) = x$, $m(\widehat{DAC}) = y$, $|BD| = 4$ birim, $|DC| = 2$ birim ve $|DA| = 1$ birim veriliyor.

Buna göre aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

A) $\cos(2x + y) = -\sin x$

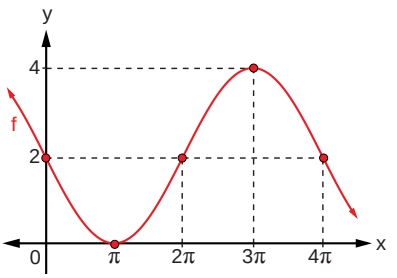
B) $\sin(2x + 3y) = -\sin y$

C) $\tan(3x + 5y) = \tan 2y$

D) $\cot(5x + 4y) = \cot x$

E) $\cos(3x + 2y) = -\cos x$

13. Aşağıda grafiği verilen fonksiyon $k > 0$, $n \neq 0$, $n \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = m + n \cdot \sin kx$ şeklinde tanımlanmıştır.

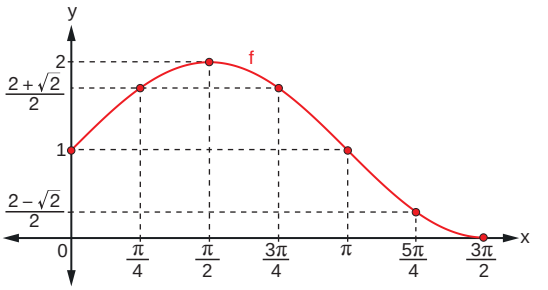


Buna göre $m + n + k$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$

D) 2 E) 3

14. $f:\left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \to [0, 2]$, $f(x) = 1 + \sin x$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir.



Buna göre f fonksiyonu ile ilgili

I. bire birdir.

II. örtendir.

III. en büyük değeri 2'dir.

IV. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$

önermelerinden hangileri doğrudur?

A) I ve II B) II ve III C) I, II ve IV

D) II, III ve IV E) III ve IV

Tema ile ilgili daha fazla soruya yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

4. TEMA

NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER (2)

4.1. **Üstel Fonksiyonlar ve Nitel Özellikleri**

4.2. **Üstel Fonksiyonların Ters Fonksiyonları**

4.3. **Logaritmik Fonksiyonlar ve Nitel Özellikleri**

4.4. **Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlarla İfade Edilebilen Denlem ve Eşitsizlikler İçeren Problemler**

Anahtar Kavramlar

- artanlık-azalanlık
- bire birlik
- doğal logaritmik fonksiyon
- e sayısı
- fonksiyonun işareti
- fonksiyonun sıfırı
- logaritmik fonksiyon
- örtenlik
- teklik-çiftlik
- üstel fonksiyon

Sembol ve Gösterimler

- a^x
- $\log x$
- $\log_a x$
- $\ln x$
- e
- e^x

Bu temada sizden

- gerçek sayılarda $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot f(mx \pm r) \pm s (k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ üstel fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilmeniz,
- üstel fonksiyonların ters fonksiyonlarını inceleyerek logaritmik fonksiyona dair çıkarım yapabilmeniz,
- $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1, x > 0)$ şeklinde tanımlı logaritmik referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot f(mx \pm r) \pm s (k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ logaritmik fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilmeniz,
- gerçek yaşam durumlarında üstel ve logaritmik fonksiyonlarla ifade edilen denklem ve eşitsizlikleri içeren problemleri çözebilmeniz

beklenmektedir.

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, araştırma ödevi ve performans görevlerini yerine getirmeniz, ölçme ve değerlendirme sorularını cevaplamanız istenmektedir.



4. Tema karekodu

4. Tema Sunusu'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Başlarken

Katlanarak çoğalan veya azalan değerlere sahip üstel fonksiyonlar ve bu fonksiyonların terslerinin alınmasıyla elde edilen logaritmik fonksiyonlar mühendislikten biyolojiye, coğrafyadan ekonomiye kadar geniş bir kullanım alanına sahiptir. Bu fonksiyonlar, doğrusal olmayan büyüme ve değişimlerin temsilinde kritik bir rol oynar. Üstel ve logaritmik fonksiyonlar, mühendislikte sistemlerin zamana bağlı değişimlerinin tanımlanmasında; biyolojide popülasyon değişimlerinde ve enzim reaksiyonlarının hızlarının tahmin edilmesinde; coğrafyada erozyon ve deprem gibi doğal afetlerin etkilerinin modellenmesinde; finansal matematikte ise yatırımların zaman içindeki değer değişimlerinin öngörülmesinde kullanılır.

Ön Değerlendirme

1. Aşağıdaki soruları verilen bilgilere göre cevaplayınız.

Aşağıdaki tabloda ülkemizde bulunan üç gölün 2023 yılındaki yüz ölçümü büyüklükleri ve su hacimleri yaklaşık olarak verilmiştir.

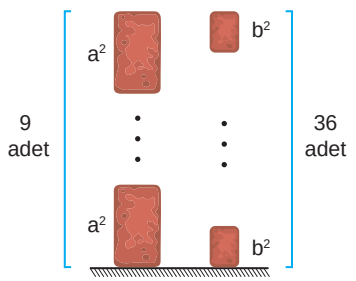
Göller	Yaklaşık Yüz Ölçümü (m^2)	Yaklaşık Su Hacmi (m^3)
Van Gölü	$3,713 \cdot 10^9$	$6,07 \cdot 10^{11}$
Eğirdir Gölü	$4,82 \cdot 10^8$	$4 \cdot 10^9$
Beyşehir Gölü	$6,56 \cdot 10^8$	$5,4 \cdot 10^9$

a) Van Gölü'ndeki yaklaşık su hacminin Beyşehir Gölü'ndeki yaklaşık su hacminden kaç m^3 fazla olduğunu bulunuz.

b) 2023 yılında yıkanma, yeme, içme, bulaşık yıkama, çamaşır yıkama gibi günlük işlerde kullanılan su miktarı kişi başı 200 litredir. Buna göre Eğirdir Gölü'nden 1000 kişinin yaşadığı bir köye kaç gün yetecek kadar su verilebileceğini bulunuz.

c) Göllerin yaklaşık yüz ölçümlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

2.



Yandaki görselde uzunlukları belirtilmiş tuğla parçaları yer almaktadır. $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere aynı zeminde bulunan ve uzunluğu a^2 cm olan tuğlalardan 9 tanesi ile uzunluğu b^2 cm olan tuğlalardan 36 tanesinin yükseklikleri eşittir.

Buna göre $\frac{b}{a}$ değerini bulunuz.

3. Kenar sayısı n olan çokgenin içine yazılan b sayısı ile oluşturulan sembol, $b^{\frac{1}{n-1}}$ $(b \in \mathbb{R})$ ifadesinin değerine eşittir. Örneğin 

$= 3^{\frac{1}{4}}$ tür.

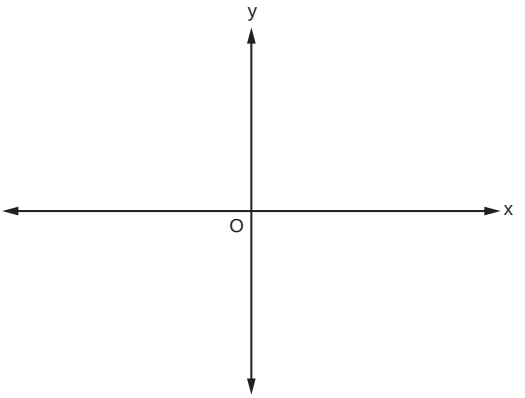
Buna göre 

$=$ 

eşitliğini sağlayan x gerçek sayısının değerini bulunuz.

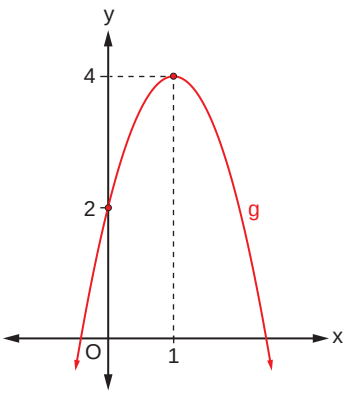
4. $f:[-\pi,\pi] \to [-6,2], f(x) = 4 \cdot \cos 3x - 2$ şeklinde tanımlı trigonometrik fonksiyon verilmiştir.

Buna göre f fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki dik koordinat sistemine çiziniz ve f fonksiyonuna ait tabloda verilen nitel özellikleri bularak aşağıdaki tabloyu doldurunuz.



Nitel Özellikler	$f(x) = 4 \cdot \cos 3x - 2$
Sıfırları	
Teklik-Çiftlik	
Maksimum Noktası ve Değeri	
Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlık-Azalanlık	
Periyodu	

5.



Uygun tanım ve değer kümesine sahip $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel referans fonksiyon grafiğine $k \cdot f(ax + b) + r$ $(a, b, k, r \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0, k \neq 0)$ dönüşümü yapılarak yandaki görselde yer alan g fonksiyonunun grafiği elde ediliyor. g fonksiyonunun maksimum değeri 4'tür.

Buna göre k, a, b ve r gerçek sayılarının değerlerini bulunuz.

6. Aşağıdaki tabloda verilen fonksiyonların nitel özelliklerini bulunuz ve ilgili boşlukları doldurunuz.

Nitel Özellikler		$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = -x + 1$	$g: (-2, \infty) \to \mathbb{R}^-$ $g(x) = -\sqrt{4x + 8}$	$h: \mathbb{R} \to [-3, \infty)$ $h(x) = x^2 - 6x + 6$	$k: (-3, 3] \to \mathbb{R}$ $k(x) = \frac{1}{3 + x} + 3$
Tanım Kümesi					
Görüntü Kümesi					
Bire Bir Olma Durumu					
Örten Olma Durumu					
Maksimum Noktası ve Değeri					
Minimum Noktası ve Değeri					
Teklik-Çiftlik					
Artanlık-Azalanlık					
Sıfırları					
İşareti	(+)				
	(−)				

4.1. ÜSTEL FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

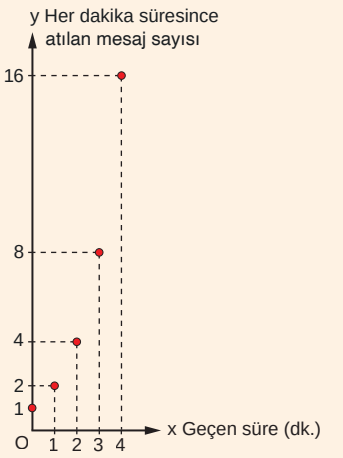
Konuya Başlarken

Bir okuldaki insan hakları kulübü, T.C. Millî Eğitim Bakanlığının yürütmekte olduğu "Okul Öğrenci Kulüpleri Sosyal Sorumluluk Programı ve Toplum Hizmeti Uygulama Projesi" kapsamında bir çalışma yapmak istemiştir. Kulüp, bu doğrultuda kadın-erkek eşitliği konusunda farkındalık oluşturulmasını da amaçlayarak bir etkinlik düzenlemiştir. Etkinlikte ilk olarak kulüp başkanı farkındalık mesajını paylaşır. Ardından mesajı alan her öğrenci, takip eden ilk dakika içerisinde aldıkları mesajı iki farklı öğrenciye gönderir.

Her öğrencinin mesaj gönderdiği bu etkinlikte geçen süreye bağlı olarak her dakika içerisinde gönderilen mesaj sayısı Tablo 4.1'de, grafik temsili ise Grafik 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1: *Her Dakika Süresince Atılan Mesaj Sayısı*

Geçen Süre (dk.)	Her Dakika Süresince Atılan Mesaj Sayısı
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16



Grafik 4.1: *Her dakika süresince atılan mesaj sayısına ait grafik*

Buna göre

1. **Tablo ve grafik incelenerek üslü ifadelerle ilişkilendirilebilen bu duruma ait bir fonksiyon nasıl oluşturulabilir? Fikirlerinizi yazınız ve arkadaşlarınızla paylaşınız.**

2. **Atılan ilk mesajın 9 dakika sonra tüm öğrencilere ulaştığı bu etkinlikte etkinlik süresi, ilk mesajın atıldığı dakika ve 9. dakikadaki mesajın ulaştığı kişi sayısı gibi ifadeler; verilen grafiğin hangi nitel özellikleri ile ilişkilendirilebilir? Bu konudaki fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız ve fikirleriniz üzerine tartışınız.**

Arkeoloji, biyoloji, coğrafya, ekonomi, fizik, kimya ve mühendislik gibi farklı alanlarda karşılaşılan ve katlanarak çoğalan veya azalan değerlere sahip olmasından dolayı üslü ifadelerle gösterilebilen ilişkiler; gerçek yaşamın birçok noktasında karşımıza çıkar. Bu tür durumlarda özellikle çoğalma ve azalma süreçlerinin süreklilik gösterdiği olayların daha doğru modellenebilmesi için özel bir sayı olan Euler sayısı (e) kullanılır. Euler sayısı veya kısaca e sayısı, π sayısı gibi sabit bir matematiksel değerdir. e sayısı irrasyonel bir sayıdır ve değeri yaklaşık 2,7182 olarak ifade edilir.

Üstel Referans Fonksiyonlar

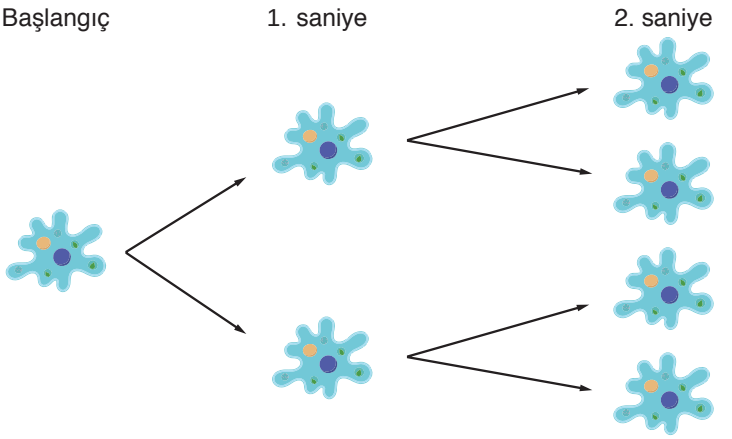
Üstel fonksiyonlar, sabit oranlı artış veya azalış gösteren değişimleri ifade etmek amacıyla kullanılan matematiksel modellerdir. Üstel fonksiyonlar, doğrusal olmayan grafikleri sayesinde ani ve hızlı değişimlerin gözlemlendiği süreçlerin analizinde etkili bir şekilde kullanılır.

1. Uygulama

Üstel Referans Fonksiyonun Tanımlanması

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. Aşağıda uygun ortam ve sıcaklıktaki bir bakteri hücresinin her bir saniye süresince ikiye bölünerek çoğalması modellenmiştir.



Buna göre

a) Bakteri artış modellemesinde geçen süreler sonunda ortamda bulunan bakteri sayılarını bularak Tablo 1'de boş bırakılan yerleri örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Süre (sn.)	0	1	2	4	5	10	15	20	25	40	50	60
Bakteri sayısı	1	2										

b) Tablo 1'deki bilgilerden yararlanarak, geçen süreye (t) bağlı olarak ortamdaki bakteri sayılarını veren f fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız ve fonksiyonun grafiğini çiziniz.

2. Uygun ortam ve sıcaklıkta bir bakteri hücresinin her bir saniye süresince bölünerek 4 katına çıktığı durum inceleniyor. Buna göre

a) 1. soruda yapılan çalışmaya benzer bir modelleme yaparak g fonksiyonunu tanımlayınız ve g fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

b) g fonksiyonunun ilk 5 saniyedeki bakteri sayısını hesaplayınız ve fonksiyonun grafiğini çiziniz.

3. 1 ve 2. sorularda elde edilen grafik temsilini ve cebirsel temsili inceleyiniz. Benzerlik ve farklılıkları bularak yorumlayınız.

4. "Bir radyoaktif maddenin yarılanma süresi, radyoaktif maddenin başlangıçtaki miktarının yarıya inmesi için gereken süreyi ifade eder."

Buna göre

a) Yarılanma süresi 5 yıl olan 256 kilogramlık bir radyoaktif maddenin yıllara göre kalan madde miktarını bularak Tablo 2'deki ilgili boşlukları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 2

Süre (yıl)	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**
Kalan Radyoaktif Madde Miktarı (kg)	128					

b) Tablo 2'deki verileri kullanarak geçen süre t, kalan madde miktarı h(t) olacak şekilde h fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız ve grafiğini çiziniz.

5. 1 ve 4. sorularda elde edilen grafik temsilini ve cebirsel temsili inceleyiniz. Benzerlik ve farklılıkların sebeplerini yorumlayınız.

6. Yapılan çalışmadan yararlanarak x gerçek sayısına bağlı üstel referans fonksiyonların nasıl tanımlanabileceğine dair fikirleriniz üzerine arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız.

1. Örnek

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ şeklinde tanımlı f ve g fonksiyonları ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Aşağıdaki Tablo 1 ve Tablo 2'yi x sayılarına karşılık gelen fonksiyon değerlerini ve $p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere A_p ve B_p noktalarını bularak doldurunuz.

Tablo 1

x	$y = f(x) = 3^x$	$A_p(x, y)$
−2		
−1		
0		
1		
2		

Tablo 2

x	$y = g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	$B_p(x, y)$
−1		
0		
1		
2		
3		

2. Tablolardaki sıralı ikililerden yararlanarak bu fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

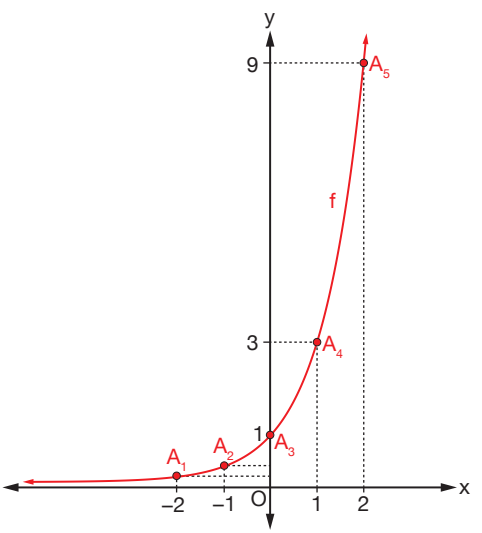
Çözüm

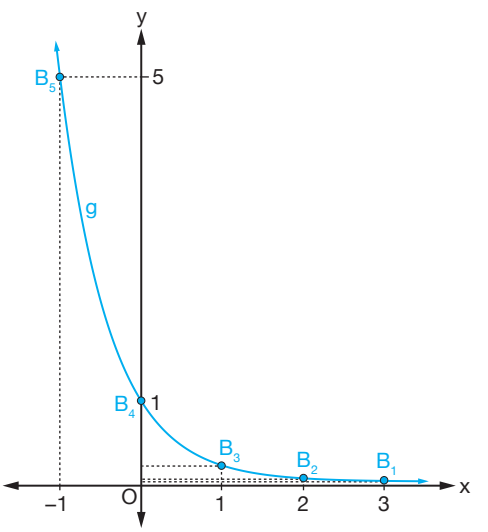
1.

x	$y = f(x) = 3^x$	$A_p(x, y)$
−2	$\frac{1}{9}$	$A_1\left(-2, \frac{1}{9}\right)$
−1	$\frac{1}{3}$	$A_2\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
0	1	$A_3(0, 1)$
1	3	$A_4(1, 3)$
2	9	$A_5(2, 9)$

x	$y = g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	$B_p(x, y)$
−1	5	$B_1(-1, 5)$
0	1	$B_2(0, 1)$
1	$\frac{1}{5}$	$B_3\left(1, \frac{1}{5}\right)$
2	$\frac{1}{25}$	$B_4\left(2, \frac{1}{25}\right)$
3	$\frac{1}{125}$	$B_5\left(3, \frac{1}{125}\right)$

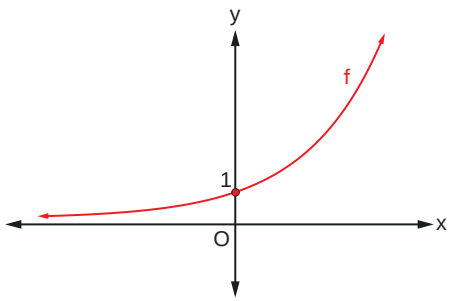
2.



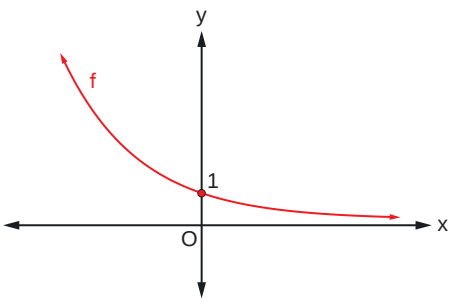


$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$ $(a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$ şeklinde tanımlanan fonksiyona **üstel referans fonksiyon** denir. Bu fonksiyondaki a sayısına üstel fonksiyonun tabanı denir. Üstel referans fonksiyonun grafik temsilleri aşağıda verilmiştir.

$a > 1$



$0 < a < 1$



2. Örnek

1. $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = (2n-6)^x$ ve $g(x) = (7-n)^x$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar üstel referans fonksiyon olduğuna göre n nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = \left(\frac{1-m}{2m-11}\right)^x$ şeklinde tanımlı f üstel referans fonksiyon olduğuna göre m nin kaç farklı tam sayı değeri alabileceğini bulunuz.

Çözüm

1. f üstel referans fonksiyon olduğu için $2n-6 > 0$ ve $2n-6 \neq 1$ olmalıdır. $2n-6 > 0$ ise $2n > 6$ ve $2n-6 \neq 1 \Rightarrow n > 3$ ve $2n \neq 7 \Rightarrow n \neq \frac{7}{2}$ olur. g fonksiyonu da üstel referans fonksiyon olduğu için $7-n > 0$ ve $7-n \neq 1$ olmalıdır. Buradan $7-n > 0$ ise $7 > n$ ve $7-n \neq 1$ $\Rightarrow n > 3$ ve $n \neq 6$ elde edilir. Buna göre $n \in (3, 7) - \left\{\frac{7}{2}, 6\right\}$ olur ve n nin alabileceği tam sayı değerleri 4 ve 5 olarak bulunur. Buradan n nin alabileceği tam sayı değerleri toplamı 9 olur.

2. f üstel referans fonksiyon olduğu için $\left(m \neq \frac{11}{2}\right)$ $\frac{1-m}{2m-11} > 0$ ve $\frac{1-m}{2m-11} \neq 1$ olmalıdır. İşaret tablosu yapılarak

m	$-\infty$	1		$\frac{11}{2}$	$+\infty$
$1-m$	+	0	−		−
$2m-11$	−		−	0	+
$\frac{1-m}{2m-11}$	−	0	+	||	−

m nin değer aralığı $\left(1, \frac{11}{2}\right)$ olarak bulunur. $\frac{1-m}{2m-11} \neq 1$ olduğundan $m \neq 4$ elde edilir. Buna göre m sayısı 2, 3 ve 5 tam sayı değerlerini alır. Bu nedenle m nin alabileceği 3 farklı tam sayı değeri vardır.

Sıra Sizde 1

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = (-m^2 - 2m + 8)^x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu üstel referans fonksiyondur.

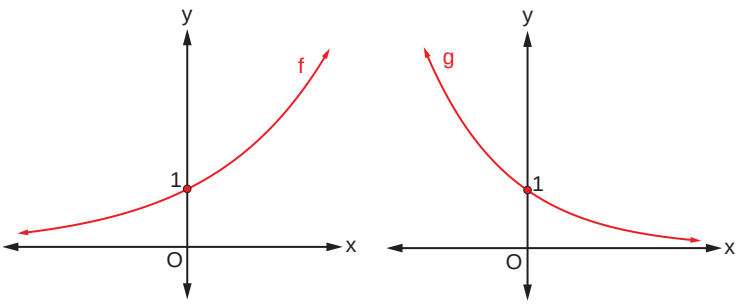
Buna göre m nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

2. Uygulama

Üstel Referans Fonksiyonların Nitel Özellikleri

Verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

Aşağıda $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = e^x$ ve $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyonlarına ait grafikler sırası ile Grafik 1 ve 2 olarak verilmiştir.



Grafik 1 **Grafik 2**

1. f ve g üstel referans fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

2. f ve g üstel referans fonksiyonların bire birliğini ve örtenliğini inceleyiniz.

3. f ve g üstel referans fonksiyonların varsa sıfırlarını bulunuz ve grafikleri inceleyerek fonksiyonların pozitif-negatif olduğu aralıkları belirtiniz.

4. f ve g üstel referans fonksiyonların artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz. Elde ettiğiniz aralıkları fonksiyonların cebirsel temsillerindeki taban değerleri ile ilişkilendirerek yorumlayınız.

5. f ve g üstel referans fonksiyonların varsa maksimum-minimum değerlerini ve bu değerleri veren noktalarını bulunuz.

6. f ve g üstel referans fonksiyonların tek-çift fonksiyon olma durumlarını inceleyiniz.

3. Örnek

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, g(x) = (m-2)^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyonun artanlığını-azalanlığını m nin aldığı değerlere göre inceleyiniz.

Çözüm

Gerçek sayılarda $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan üstel fonksiyonlar, a değeri 1'den büyük olduğunda artan, a değeri 0 ile 1 arasında olduğunda azalan özellik gösterir.

Buna göre g fonksiyonun tabanı olan $m-2$ ifadesi 1'den büyükse $(m-2>1)$, $m>3$ koşuluyla g fonksiyonu artandır.

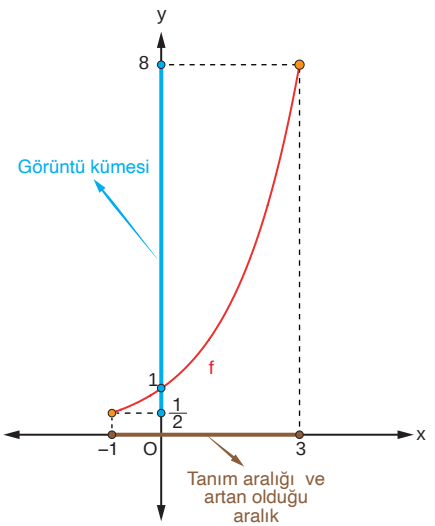
Tabanın 0 ile 1 aralığında bulunduğu $(0<m-2<1)$ durumlarda $2<m<3$ koşuluyla g fonksiyonu azalandır.

4. Örnek

$f: [-1,3] \to \left[\frac{1}{2}, 8\right], f(x) = 2^x$ şeklinde tanımlı üstel fonksiyonun nitel özelliklerini bulunuz.

Çözüm

Verilen tanım aralığı dikkate alınarak çizilmiş $f(x) = 2^x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir. f fonksiyonun tanım kümesi $[-1,3]$, görüntü kümesi $\left[\frac{1}{2}, 8\right]$ dır.



Grafik incelendiğinde tanım aralığındaki her x değerine karşılık gelen f değerleri de farklı olduğundan f, bire bir fonksiyondur. Değer aralığındaki her f değeri tanım aralığındaki en az bir x değerine karşılık geldiğinden f fonksiyonu örtendir.

$f(x) = 0$ yapan x değeri olmadığından f fonksiyonunun sıfırı yoktur. f fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta daima pozitif değerler alır.

$\forall x_1, x_2 \in [-1,3]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu $[-1,3]$ nda artandır. f fonksiyonunun verilen aralıkta maksimum değeri 8'dir ve bu değeri $x = 3$'te alır. Fonksiyonun minimum değeri $\frac{1}{2}$'dir ve bu değeri $x = -1$'de alır. f üstel fonksiyonu tek ya da çift fonksiyon değildir.

Sıra Sizde 2

$f: (-\infty, 2] \to \left[\frac{1}{9}, \infty\right), f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ şeklinde tanımlı üstel fonksiyonunun nitel özelliklerini bulunuz.

Üstel Referans Fonksiyondan Türetilen Fonksiyonlar

Üstel referans fonksiyonlardaki dönüşümler incelenerek türetilen bu fonksiyonların grafiklerindeki değişiklikler (germe, sıkıştırma, ötelenme ve simetri) rahatlıkla analiz edilebilir.

3. Uygulama

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $f(x) = a^x$ $(a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$ Şeklinde Tanımlı Üstel Referans Fonksiyondan Türetilen $g(x) = k \cdot f(mx + r) + s$ $(k, m, r, s \in R, k \neq 0, m \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Üstel Fonksiyonun Nitel Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

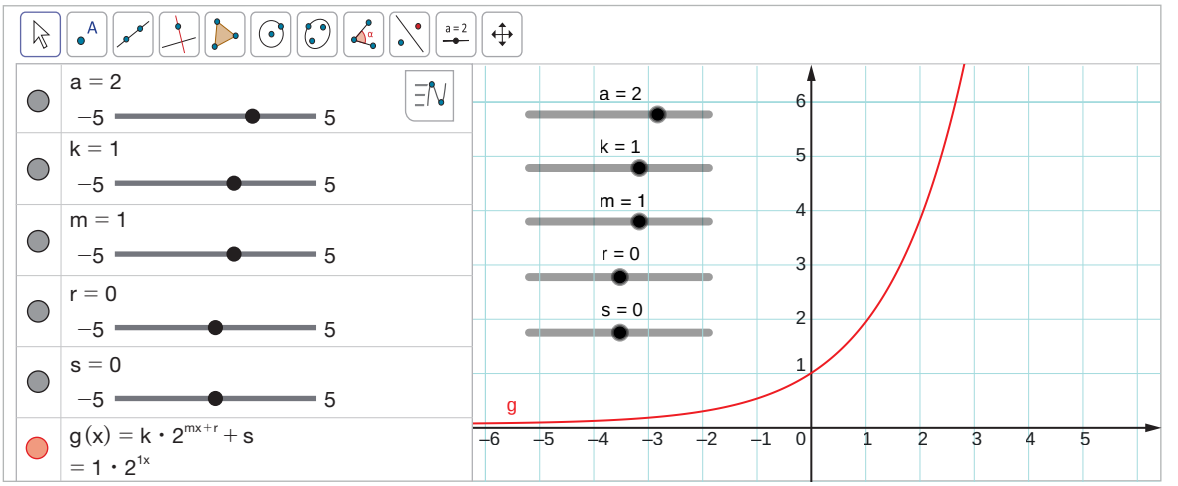
1. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan a, k, m, r ve s sürgülerini tanımlayarak aralığı -5 ile 5 olarak seçiniz.

2. adım: a sürgüsünü 2 seçerek cebir menüsünden **Giriş** bölümüne $g(x) = k \cdot 2^{mx+r} + s$ yazınız.

3. adım: Sürgüleri $k = 1, m = 1, r = 0, s = 0$ seçerek $f(x) = 2^x$ üstel referans fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



a) $m = 1, r = 0, s = 0$ ve $k \neq 0$ iken k sürgüsüne Tablo 1'deki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Fonksiyon İsmi	k Sürgüsünün Değeri	Oluşan Üstel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot 2^{mx+r} + s$	Üstel Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Üstel Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 3$	$h(x) = 3 \cdot 2^x$	Her bir bağımsız değişkene karşılık gelen değeri 3 ile çarpma	3 kat dikey germe
n	$k = -1$			
t	$k = 2$			
p	$k = -2$			

b) $m = 1, r = 0$ ve $k \neq 0$ iken k ve s sürgüsüne Tablo 2'deki değerleri giriniz ve elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 2

Fonksiyon İsmi	k ve s Sürgüsünün Değeri	Oluşan Üstel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot 2^{mx+r} + s$	Üstel Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Üstel Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1$ ve $s = 1$	$h(x) = 2^x + 1$	Her bir bağımsız değişkene karşılık gelen fonksiyon değerine 1 ekleme	y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme
n	$k = -1$ ve $s = 3$			
t	$k = 3$ ve $s = -2$			
p	$k = -4$ ve $s = -\frac{1}{2}$			

c) $m \neq 0, k \neq 0$ ve $r = 0$ iken k, s ve m sürgüsüne Tablo 3'teki değerleri giriniz ve elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak Tablo 3'te boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3

Fonksiyon İsmi	k, s ve m Sürgüsünün Değeri	Oluşan Üstel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot 2^{mx+r} + s$	Üstel Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Üstel Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1, s = 0$ ve $m = 3$	$h(x) = 2^{3x}$	Her bir bağımsız değişkeni 3 ile çarpma	3 kat yatay sıkıştırma
n	$k = -2, s = 2$ ve $m = 3$			
t	$k = 1, s = 0$ ve $m = 2$			
p	$k = -4, s = -\frac{1}{2}$ ve $m = \frac{1}{3}$			

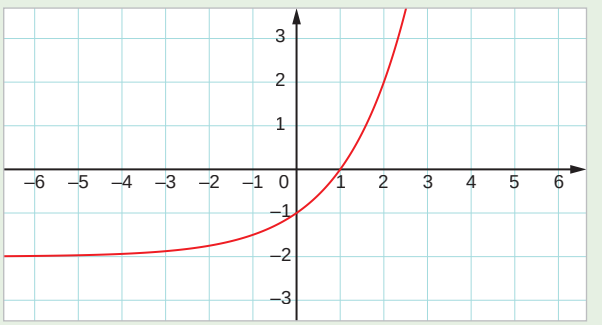
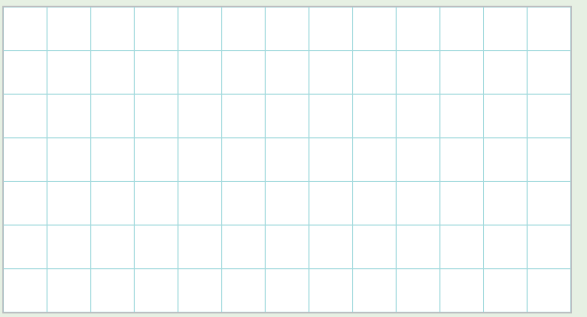
ç) $m \neq 0$ ve $k \neq 0$ iken k, s, m ve r sürgüsüne Tablo 4'teki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 4

Fonksiyon İsmi	k, s, m ve r Sürgüsünün Değeri	Oluşan Üstel Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot 2^{mx+r} + s$	Üstel Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Üstel Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1, s = 1,$ $m = 1$ ve $r = -3$	$h(x) = 2^{x-3} + 1$	Her bir bağımsız değişkenin 3 eksiğinin fonksiyon değerine 1 ekleme	x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme
n	$k = 2, s = 0,$ $m = 2$ ve $r = 3$			
t	$k = 3, s = -1,$ $m = 2$ ve $r = 1$			
p	$k = -1, s = 1,$ $m = -2$ ve $r = 0$			

2. $f(x) = 2^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyona uygulanan dönüşümlerle elde edilen üstel fonksiyonların cebirsel ve grafik temsillerini bularak Tablo 5'te boş bırakılan kısmı örnekteki gibi doldurunuz. Fonksiyonların grafik temsillerini matematik yazılımlarını kullanarak oluşturunuz.

Tablo 5

f Fonksiyonunun Grafiğine Uygulanan Dönüşüm	Cebirsel Temsil	Grafik Temsili
y ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme	$g(x) = 2^x - 2$	
3 kat dikey sıkıştırma ve x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme		

3. $f(x) = 2^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyonun nitel özelliklerinden hareketle Tablo 6 ve Tablo 7'de cebirsel temsilleri üstel fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili varsayımlarınızı örnekteki gibi ifade ediniz.

Tablo 6

$h: \mathbb{R} \to (1, \infty), h(x) = 3 \cdot 2^{x-4} + 1$	
Nitel Özellikler	**Varsayımlar**
Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	
Bire Birliği	
Örtenliği	Örten bir fonksiyondur.
Sıfırı	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlığı-Azalanlığı	
Tekliği-Çiftliği	

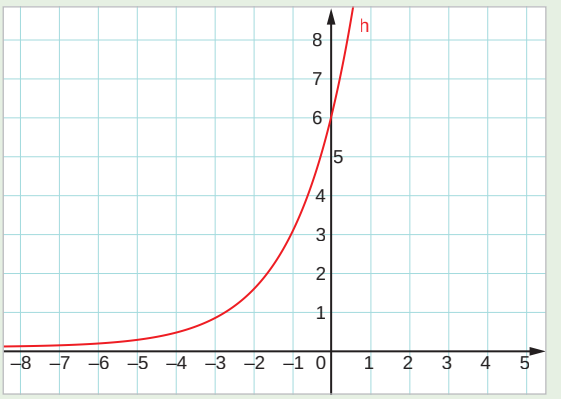
Tablo 7

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = k \cdot a^{mx+r} + s \; (a > 0 \text{ ve } a \neq 1) \; (k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$	
Nitel Özellikler	**Varsayımlar**
Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	
Bire Birliği	Bire bir fonksiyondur.
Örtenliği	
Sıfırı	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlığı-Azalanlığı	
Tekliği-Çiftliği	

4. Aşağıda $f(x) = 2^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyondan türetilmiş bazı fonksiyonlar verilmiştir.

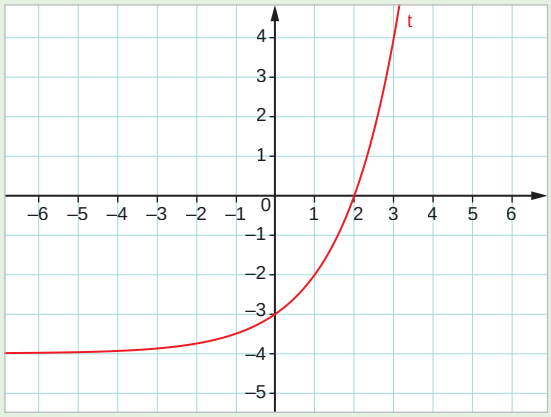
a) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımları kullanarak çiziniz, Tablo 8'i istenen nitel özellikler ile örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 8

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$h(x) = 3 \cdot 2^{x+1}$	Grafik		
		Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun tüm gerçek sayılar için tanımlı olduğu görülmektedir. Tanım kümesi $\mathbb{R}$ dır.	Grafik incelendiğinde h fonksiyonun görüntü aralığının $(0, \infty)$ olduğu görülmektedir. Görüntü kümesi $\mathbb{R}^+$ dır.
	Cebirsel	f üstel referans fonksiyonu $\mathbb{R}$ de tanımlıdır. $h(x) = 3 \cdot f(x+1) = 3 \cdot 2^{x+1}$ olduğu için h fonksiyonunun da tanım kümesi $\mathbb{R}$ olur.	f üstel referans fonksiyonunun görüntü kümesi $(0, \infty)$ dır. $h(x) = 3 \cdot f(x+1) = 3 \cdot 2^{x+1}$ olduğu için h fonksiyonunun da görüntü kümesi $\mathbb{R}^+$ olur.
$n(x) = 2^{3x} - 1$	Grafik		
	Cebirsel		

b) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz, Tablo 9'u istenen nitel özellikler ile örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 9

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Fonksiyonun Sıfırları	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar
$t(x) = 2^x - 4$	Grafik		
		Grafik incelendiğinde f üstel referans fonksiyonuna ait grafiğin y ekseninin negatif yönünde 4 birim ötelenmesiyle elde edilen t fonksiyonun grafiği x eksenini 2 noktasında kestiği görülür. Bu nedenle t fonksiyonunun sıfırı $x = 2$'dir.	Grafik incelendiğinde t fonksiyonunun değerlerinin $\forall x \in \mathbb{R}$ için arttığı görülür. Bu durumda t fonksiyonu artandır.
	Cebirsel	$t(x) = 0$ için $2^x - 4 = 0 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$ olur. t fonksiyonunun sıfırı $x = 2$ olur.	t fonksiyonunun tabanı 2'dir. t fonksiyonunun tabanı 1'den büyüktür. Bundan dolayı t fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için artandır.
$p(x) = -2^{-x} + 8$	Grafik		
	Cebirsel		

5. Yaptığınız çalışmalardan elde ettiğiniz nitel özellikleri kullanarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f üstel referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot a^{mx+r} + s \, (a \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } a \neq 1)$ $(k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ üstel fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

6. Oluşturduğunuz varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f üstel referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot a^{mx+r} + s \, (a \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } a \neq 1)$ $(k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ üstel fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz. Oluşturduğunuz önermeyi sözel veya cebirsel olarak ifade ediniz.

7. Aşağıdaki soruyu cevaplayarak elde ettiğiniz önermelerin gerçek yaşam bağlamındaki kullanışlılığını değerlendiriniz.

Üniversite harçlığını çıkarmak için yaz tatilinde çalışmayı tercih eden Emre, kazandığı 50 000 TL'yi 3 yıl boyunca banka hesaplarında değerlendirmek istemektedir. Banka, müşterilerine farklı kâr payı hesaplama planları sunmaktadır. Aşağıdaki tabloda iki farklı planın yıllık oranları verilmiştir.

Plan	1. Yıl Kâr Payı Oranı	2. Yıl Kâr Payı Oranı	3. Yıl Kâr Payı Oranı	Hesaplama Türü
Plan A	%4	%4	%4	Her yıl %4 oranında bileşik (birikimli) kâr payı uygulanmaktadır.
Plan B	%3	%3	%3	Her yıl %3 oranında bileşik (birikimli) kâr payı + 3 yılın sonunda toplam kârın %20'si kadar bonus eklenir.

Buna göre

a) Kâr payı hesaplama planlarının ifade ettiği fonksiyonların cebirsel temsilini yazınız.

b) Emre'nin iki plandan elde edeceği geliri ayrı ayrı hesaplayınız ve hangi teklifi kabul etmesi durumunda daha fazla kazanç sağlayacağını bulunuz.

5. Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = 4^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyon olmak üzere $g(x) = 2 \cdot f(x), h(x) = f(x) - 3$ ve $r(x) = 2 \cdot f(x) - 3$ şeklinde tanımlanan g, h ve r fonksiyonları ile ilgili aşağıdaki işlemleri yapınız.

1. g, h ve r fonksiyonlarının cebirsel temsillerini yazınız.
2. r fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

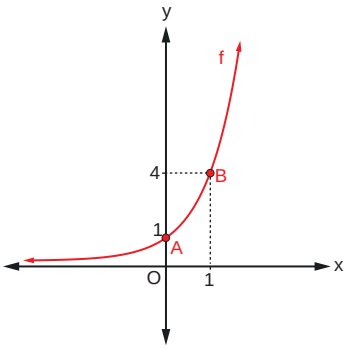
Çözüm

1. $g(x) = 2 \cdot f(x)$ olduğu için $g(x) = 2 \cdot 4^x$ elde edilir.

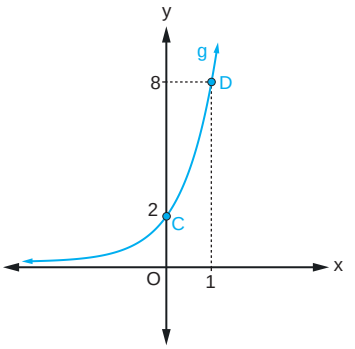
   $h(x) = f(x) - 3$ olduğu için $h(x) = 4^x - 3$ elde edilir.

   $r(x) = 2 \cdot f(x) - 3$ olduğu için $r(x) = 2 \cdot 4^x - 3$ elde edilir.

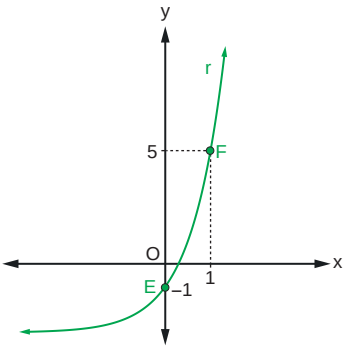
2. r fonksiyonunun grafiği çizilirken f üstel referans fonksiyonunun grafiği 2 kat dikey gerilir. Sonra elde edilen grafik, y ekseni boyunca negatif yönde 3 birim ötelenir. Buna göre r fonksiyonunun grafiği adım adım aşağıda verilmiştir.



$f(x) = 4^x$



$g(x) = 2 \cdot 4^x$



$r(x) = 2 \cdot 4^x - 3$

6. Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = 6^x$ olmak üzere f üstel referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = f(3x), h(x) = f(x - 1)$ ve $k(x) = f(3x - 1)$ şeklinde tanımlanan g, h ve k fonksiyonları ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. g, h ve k fonksiyonlarının cebirsel temsillerini yazınız.
2. k fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

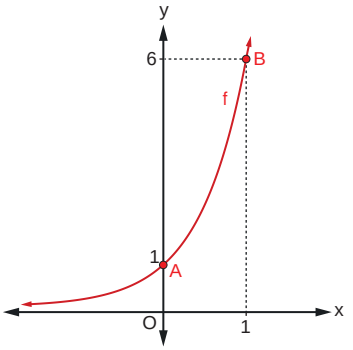
1. $g(x) = f(3x)$ olduğu için $g(x) = 6^{3x}$ elde edilir.

   $h(x) = f(x - 1)$ olduğu için $h(x) = 6^{x-1}$ elde edilir.

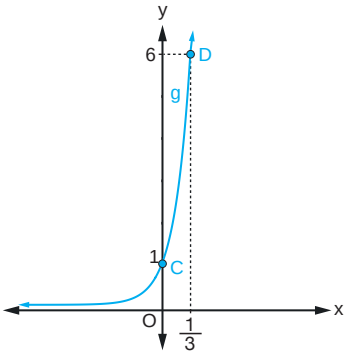
   $k(x) = f(3x - 1)$ olduğu için $k(x) = 6^{3x-1}$ elde edilir.

2. k fonksiyonunun grafiği çizilirken f üstel referans fonksiyonunun 3 kat yatay sıkıştırılır. Elde edilen grafik x ekseni boyunca $\frac{1}{3}$ birim pozitif yönde ötelenir.

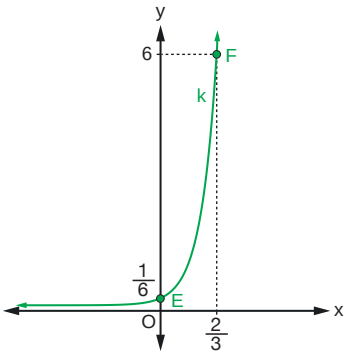
Buna göre k fonksiyonunun grafik temsili adım adım aşağıda verilmiştir.



$f(x) = 6^x$



$g(x) = 6^{3x}$



$k(x) = 6^{3x-1}$

Sıra Sizde 3

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = 2^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyondan türetilen $g(x) = 2^x + 3$, $h(x) = 2^{2x-1}$ ve $t(x) = 2^{2x-1} + 3$ şeklinde tanımlanan fonksiyonların grafik temsillerini aşağıda boş bırakılan alanlara çiziniz.

g fonksiyonunun grafiği

h fonksiyonunun grafiği

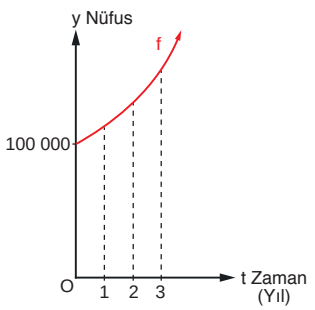
t fonksiyonunun grafiği

7. Örnek

Bir bölgedeki nüfus, üstel fonksiyonlarla matematiksel olarak modellenebilmektedir. Başlangıçta 100 000 nüfusa sahip olan A şehrinin zamana (t, yıl) bağlı nüfus değişim fonksiyonu $f(t) = 100\,000 \cdot (1,02)^t$ şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre f üstel fonksiyonunun nitel özelliklerini bulunuz.

Çözüm

A şehrinin zamana bağlı nüfus değişimini veren f fonksiyonunun grafik temsili aşağıda verilmiştir.



Geçen zamana bağlı olarak tanımlanan f fonksiyonunun tanım kümesi $[0, \infty)$ olur, görüntü kümesi ise $[100\,000, \infty)$ olur.

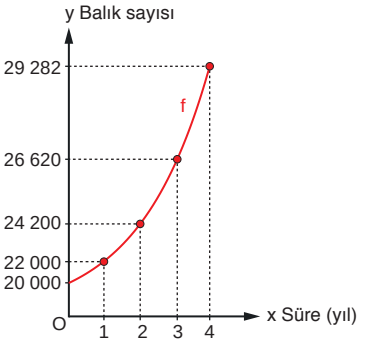
Nüfus, daima pozitif bir sayı olacağı için f fonksiyonu daima pozitiftir ve f fonksiyonunun sıfırı yoktur. f fonksiyonunun tabanındaki sayı $1,02 > 1$ olduğundan f fonksiyonu artandır.

f fonksiyonunun minimum değeri 100 000, minimum değerini veren nokta 0'dır. Maksimum noktası ve maksimum değeri yoktur.

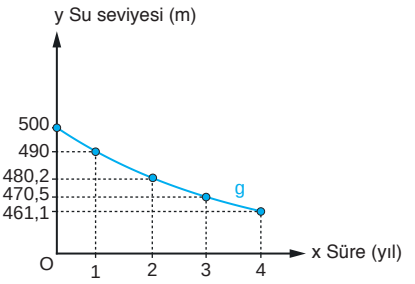
Grafik incelendiğinde f fonksiyonu bire birdir ve örten değildir. f fonksiyonu tanım aralığında ne tek ne de çift fonksiyondur.

Sıra Sizde 4

Bir göldeki balık popülasyonu her yıl yaklaşık %10 oranında artmakta, göldeki su seviyesi ise her yıl yaklaşık olarak %2 oranında azalmaktadır. 2024 yılında göldeki balık popülasyonu 20 000 olarak tespit edilmiş, gölün su seviyesi ise 500 metre olarak ölçülmüştür. 2024-2028 yılları arasında balık sayılarındaki artışı gösteren üstel foksiyon Grafik 1'de, su seviyesindeki azalışı gösteren üstel fonksiyon Grafik 2'de verilmiştir.



Grafik 1



Grafik 2

Buna göre Grafik 1 ve Grafik 2'yi inceleyerek f ve g fonksiyonları için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. **Cebirsel gösterimlerini bulunuz.**

2. **Tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.**

3. **Bire bir olup olmadıklarını inceleyiniz.**

4. **Artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.**

5. **İşaretlerinin pozitif $(+)$ ve negatif $(-)$ olduğu aralıkları bulunuz.**

6. **Maksimum-minimum noktaları ve değerlerini bulunuz.**

7. **Tek-çift fonksiyon olma durumlarını inceleyiniz.**

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Kontrol Noktası

1. k, m, r ve $s \in \mathbb{R}$ $(m \neq 0, k \neq 0, s > 0$ ve $r > 0)$ olmak üzere $f(x) = a^x$ $(a \neq 1, a \in \mathbb{R}^+)$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot a^{mx+r} + s$ üstel fonksiyonunun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar uygulanır.

1. adım: $f(x) = a^x$ üstel referans fonksiyonu x ekseni boyunca negatif yönde r birim ötelenerek $b(x) = a^{x+r}$ fonksiyonun grafiği çizilir.

2. adım: $b(x) = a^{x+r}$ fonksiyonunun grafiği $|m|$ değeri arttıkça yatayda sıkıştırılarak, $|m|$ değeri azaldıkça yatayda gerilerek $c(x) = a^{mx+r}$ fonksiyonun grafiği çizilir.

3. adım: $c(x) = a^{mx+r}$ fonksiyonunun değerini k katına eşleyen $d(x) = k \cdot a^{mx+r}$ fonksiyonun grafiği çizilir.

4. adım: $d(x) = k \cdot a^{mx+r}$ fonksiyonu y ekseni boyunca pozitif yönde s birim ötelenerek $g(x) = k \cdot a^{mx+r} + s$ fonksiyonun grafiği çizilir.

2. k, m, r ve $s \in \mathbb{R}$ $(m \neq 0, k \neq 0, s > 0$ ve $r > 0)$ olmak üzere gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = k \cdot a^{mx+r} + s$ $(a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$ üstel fonksiyonunun nitel özellikleri için aşağıdaki sonuçlara varılır.

- g fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.
- $k > 0$ için g fonksiyonunun görüntü kümesi (s, ∞) olur.

  $k < 0$ için g fonksiyonunun görüntü kümesi $(-\infty, s)$ olur.
- g fonksiyonu bire birdir.
- Artanlık-azalanlık incelemesi
  - » Üstel fonksiyonların tabanlarındaki sayı $a > 1$ olduğunda aşağıdaki durum gerçekleşir.

k \ m	m > 0	m < 0
k > 0	Artan	Azalan
k < 0	Azalan	Artan

  - » Üstel fonksiyonların tabanlarındaki sayı $0 < a < 1$ olduğunda aşağıdaki durum gerçekleşir.

k \ m	m > 0	m < 0
k > 0	Azalan	Artan
k < 0	Artan	Azalan

Ek soruların yer aldığı 1. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Üstel Fonksiyonlar ve Üstel Fonksiyonların Nitel Özellikleri)

Alıştırmalar

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = \left(\frac{2-m}{3m+15}\right)^x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu üstel fonksiyondur.

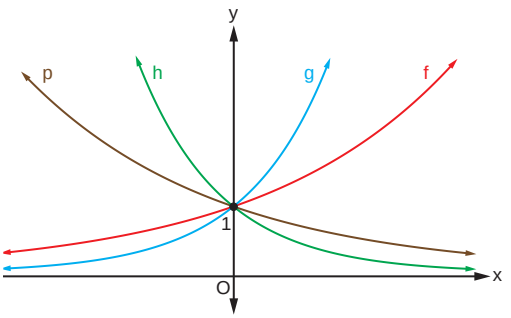
Buna göre m nin kaç farklı tam sayı değeri alabileceğini bulunuz.

2. Üstel referans fonksiyondan türetilmiş g fonksiyonu $g: [-4, -1] \to \mathbb{R}, g(x) = 4^{-x} + 1$ şeklinde tanımlanıyor.

Buna göre g fonksiyonunun nitel özelliklerini bularak tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

Nitel Özellikler		g
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
Bire Bir Olma Durumu		
Örten Olma Durumu		
Maksimum Noktası ve Değeri		
Minimum Noktası ve Değeri		
Teklik-Çiftlik		
Artanlık-Azalanlık		
Sıfırı		
İşareti	(+)	
	(−)	

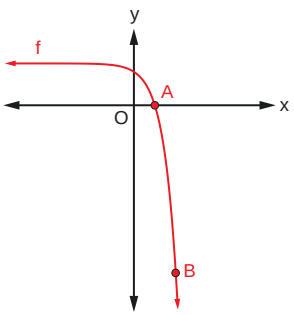
3.



Yanda $f(x) = a^x, g(x) = b^x, h(x) = c^x$ ve $p(x) = d^x$ üstel referans fonksiyonların grafikleri verilmiştir.

Buna göre a, b, c ve d pozitif gerçek sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

4.



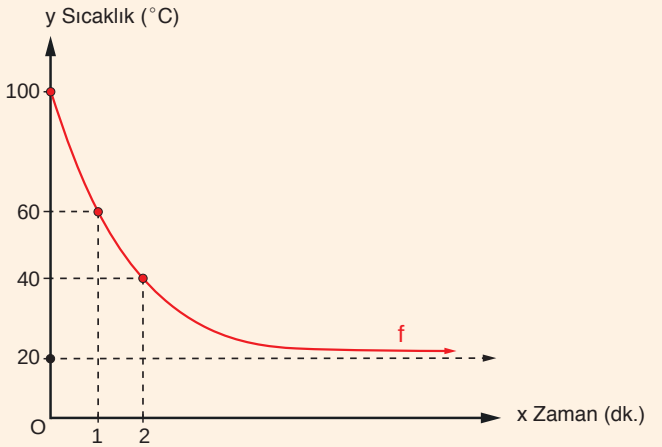
Yanda $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a \cdot 5^{x-1} + b$ şeklinde tanımlı üstel fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

A(1, 0) ve B(2, − 8) noktalarından geçen f üstel fonksiyonu için a − b değerini bulunuz.

4.2. ÜSTEL FONKSİYONLARIN TERS FONKSİYONLARI

Konuya Başlarken

Mühendislik alanında özellikle termodinamik ve soğutma sistemleri üzerine yapılan çalışmalarda sıcaklık değişiminin zamana bağlı olarak belirlenmesinde e tabanlı üstel fonksiyonlardan yararlanılmaktadır. Başlangıçta 100 °C sıcaklığa sahip bir cismin belirli bir ortamda soğumaya bırakılması durumunda oluşan e tabanlı bir referans fonksiyonun dönüşümüyle elde edilen f üstel fonksiyonu Grafik 4.2'de verilmiştir.



Grafik 4.2: *f fonksiyonunun grafiği*

Grafiği inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. **Cismin 3. dakikadaki sıcaklık değerinin hesaplanmasında kullanılabilecek matematiksel modele ve çözüm yöntemlerine ilişkin fikirlerinizi yazınız. Fikirleriniz üzerine sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız.**

2. **Sıcaklığın 40 °C'a düşmesi için geçen sürenin nasıl belirlenebileceğine ilişkin fikirlerinizi yazınız. Bu süreçte kullanılacak matematiksel model ve çözüm yöntemleri ile ilgili fikirleriniz üzerine sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız.**

Logaritmik Referans Fonksiyon

Üstel referans fonksiyonlar, sabit oranlı artış veya azalış süreçlerini modellemektedir. Bu tür süreçlerde artış oranının belirlenmesi gerektiğinde üstel referans fonksiyonun tersi olan logaritmik referans fonksiyon kullanılır.

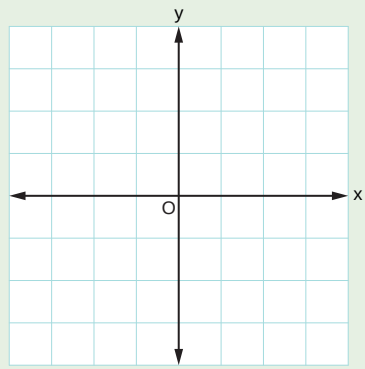
4. Uygulama

Üstel Referans Fonksiyonun ve Bu Fonksiyondan Türetilen Fonksiyonların Ters Fonksiyonlarının Bulunması

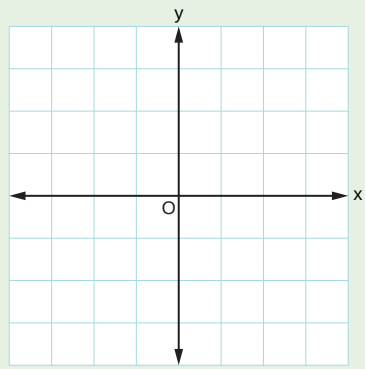
Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. a) Tablo 1 ve Tablo 2'de verilen g ve h üstel referans fonksiyonlarına ait noktaları ve bağımlı-bağımsız değişkenlerin yer değiştirmesiyle oluşturulan yeni ilişkiye ait noktaları kullanarak tablolardaki boşlukları uygun şekilde doldurunuz. Bu noktaları yanlarında verilen dik koordinat sisteminde işaretleyiniz ve noktaları uygun şekilde birleştirerek grafiklerini çiziniz.

Tablo 1

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2^x$			Bağımlı ve Bağımsız Değişkenin Yer Değiştirmesiyle Oluşan Yeni İlişki			Grafik Temsilleri
Bağımsız Değişken (x)	**Bağımlı Değişken (y)**	**(x, y)**	**Bağımsız Değişken (x)**	**Bağımlı Değişken (y)**	**(x, y)**	
−1				−1		
0				0		
1						
2						
3						

Tablo 2

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $h(x) = 3^x$			Bağımlı ve Bağımsız Değişkenin Yer Değiştirmesiyle Oluşan Yeni İlişki			Grafik Temsilleri
Bağımsız Değişken (x)	**Bağımlı Değişken (y)**	**(x, y)**	**Bağımsız Değişken (x)**	**Bağımlı Değişken (y)**	**(x, y)**	
−1						
0						
1						
2				2		
3				3		

b) g ve h üstel referans fonksiyonda bağımlı ve bağımsız değişken yer değiştirdiğinde elde edilen ilişkinin fonksiyon olup olmadığını sınıf arkadaşlarınız ile tartışarak görüşünüzü paylaşınız. Elde ettiğiniz varsayımları yazınız.

2. **a)** Cebirsel temsilleri verilen üstel fonksiyonların bağımlı ve bağımsız değişkenlerinin yerleri değiştirilerek farklı tanım ve değer kümesine göre oluşan yeni fonksiyonların bulunması ile ilgili Tablo 3'teki boşluklara uygun şekilde doldurunuz. Elde edilen noktaları yanlarında verilen boş dik koordinat sisteminde işaretleyiniz ve noktaları uygun şekilde birleştirerek grafik temsillerini çiziniz.

Tablo 3

$g: \mathbb{R} \to (-1, \infty)$ $g(x) = -1 + 3 \cdot 2^x$			Bağımlı ve Bağımsız Değişkenin Yer Değiştirmesiyle Oluşan Yeni İlişki			Grafik Temsilleri
Bağımsız Değişken (x)	**Bağımlı Değişken (y)**	**A(x, y)**	**Bağımsız Değişken (x)**	**Bağımlı Değişken (y)**	**B(x, y)**	
−1						
−2						
0						
1						
2						

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $h(x) = 5^x + 1$			Bağımlı ve Bağımsız Değişkenin Yer Değiştirmesiyle Oluşan Yeni İlişki			Grafik Temsilleri
Bağımsız Değişken (x)	**Bağımlı Değişken (y)**	**C(x, y)**	**Bağımsız Değişken (x)**	**Bağımlı Değişken (y)**	**D(x, y)**	
−1						
−2						
0						
1						
2						

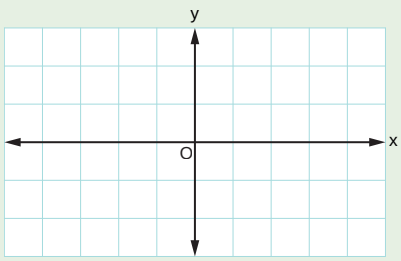
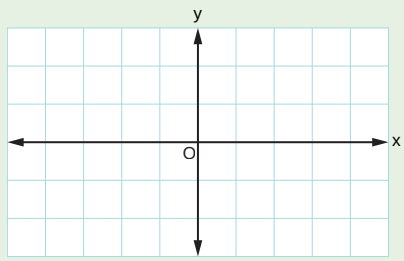
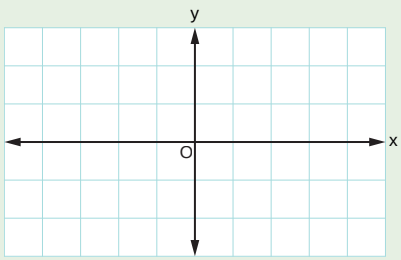
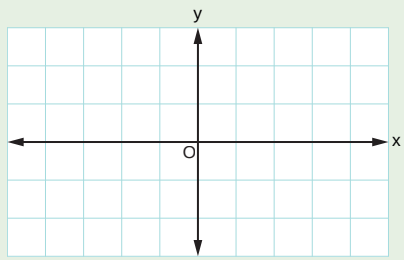
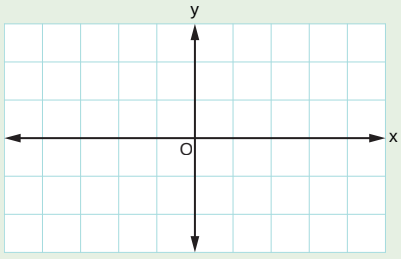
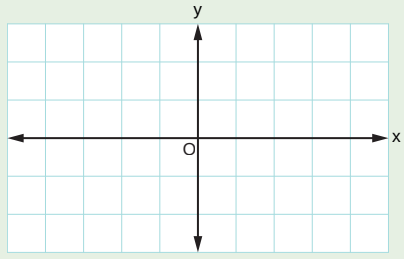
$n: \mathbb{R} \to (-\infty, 2)$ $n(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$			Bağımlı ve Bağımsız Değişkenin Yer Değiştirmesiyle Oluşan Yeni İlişki			Grafik Temsilleri
Bağımsız Değişken (x)	**Bağımlı Değişken (y)**	**E(x, y)**	**Bağımsız Değişken (x)**	**Bağımlı Değişken (y)**	**F(x, y)**	
−1						
−2						
0						
1						
2						

b) Tablo 3'teki grafik temsilleri inceleyerek üstel referans fonksiyonlardan türetilen fonksiyonların hangi durumlarda terslerinin de fonksiyon olabileceği hakkında genellemeler yapınız.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x (a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$ şeklinde tanımlanan üstel referans fonksiyonların ters fonksiyonları $f^{-1}(x) = \log_a x$ şeklinde gösterilir ve bu fonksiyonlar logaritmik referans fonksiyon olarak adlandırılır.

3. a) Tablo 4'te f, g ve h üstel referans fonksiyonlarının cebirsel temsilleri verilmiştir. Bu fonksiyonların ve ters fonksiyonların grafik temsillerini matematik yazılımından yararlanarak çiziniz.

Tablo 4

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = 7^x$	
Fonksiyonun Grafik Temsili	**Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili**
	
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, g(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$	
Fonksiyonun Grafik Temsili	**Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili**
	
$h: [1, \infty) \to [13, \infty), h(x) = 10^x + 3$	
Fonksiyonun Grafik Temsili	**Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili**
	

b) Tablo 4'teki grafik temsilleri dikkate alarak genellemeleriniz ile varsayımlarınızı karşılaştırınız. Karşılaştırmada elde ettiğiniz sonuçları yazınız.

4. Üstel referans fonksiyonlardan türetilebilen fonksiyonların terslerinin cebirsel temsillerinin birer fonksiyon olmasına ilişkin şartlara ait önermenizi matematiksel olarak doğrulanacak şekilde sununuz.

5. Tablo 5'te üstel fonksiyonlar ve üstel fonksiyonların terslerine ait cebirsel temsiller verilmiştir. Oluşturduğunuz önermelerden yararlanarak Tablo 5'teki boşlukları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 5

Üstel Fonksiyon	Fonksiyonun Tersi
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, g(x) = 3^x$	
$h: \mathbb{R} \to (2, \infty), h(x) = 2 + 5^x$	$h^{-1}: (2, \infty) \to \mathbb{R}, h^{-1}(x) = \log_5(x - 2)$
$m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, m(x) = 2^{x+1}$	
	$n^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, n^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{5}$
$p: \mathbb{R} \to (-1, \infty), p(x) = 3 \cdot 2^x - 1$	
	$t^{-1}: (3, \infty) \to \mathbb{R}, t^{-1}(x) = \log_4(2x - 6)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = e^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyonun tersi $f^{-1}(x) = \log_e x = \ln x \, (x > 0)$ doğal logaritmik referans fonksiyon olarak adlandırılır.

6. Matematik yazılımları kullanarak aşağıda verilen adımları gerçekleştirerek soruları cevaplayınız.

1. adım: Matematik yazılımında **Giriş** kısmına $f(x) = x$ yazınız ve doğrusal referans fonksiyonun grafiğini çiziniz.

2. adım: Tablo 5 'te cebirsel temsilleri verilen fonksiyonları **Giriş** kısmına yazarak bu fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

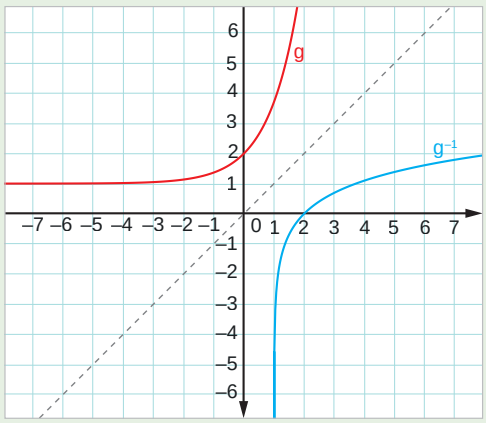
3. adım: Verilen fonksiyonların ters fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümesini dikkate alarak bu fonksiyonların terslerinin cebirsel temsilini tabloda uygun alana yazınız.

4. adım: Ters fonksiyonunun cebirsel temsilini matematik yazılımının **Giriş** kısmına yazarak bu fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

5. adım: Tüm grafikleri örnekteki gibi tabloda uygun alanlara çiziniz.

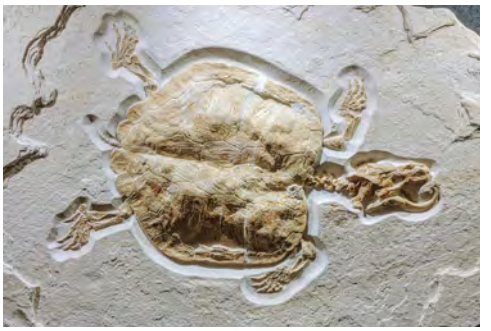
a) Üstel referans fonksiyonun ve bu fonksiyondan türetilen fonksiyonların grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği ile bu fonksiyonların tersinin grafiği arasındaki ilişkiyi belirtiniz. Bunun için tablonun altındaki alanı kullanınız.

Tablo 5

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili	Fonksiyonun ve Fonksiyonun Tersinin Grafik Temsili
$g: \mathbb{R} \to (1, \infty)$ $g(x) = e^x + 1$	$g^{-1}: (1, \infty) \to \mathbb{R}$ $g^{-1}(x) = \ln(x - 1)$	
$h: [0, 3] \to [3, 129]$ $h(x) = 2 \cdot 4^x + 1$	h^{-1}: $h^{-1}(x) =$	
$k: [-5, -1] \to [6, 166]$ $k(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 4$	k^{-1}: $k^{-1}(x) =$	

b) a maddesindeki cebirsel ve grafik temsillerini inceleyerek üstel referans fonksiyonun ve bu fonksiyondan türetilen fonksiyonların artanlığı ve azalanlığı ile bu fonksiyonların ters fonksiyonlarının artanlığı ve azalanlığı arasındaki ilişkiye dair çıkarımlarda bulununuz.

7. Aşağıdaki soruyu cevaplayarak elde ettiğiniz önermelerin gerçek yaşam bağlamındaki kullanışlılığını değerlendiriniz.



Fosillerin yaşlarını bulmak için Karbon-14 testi yapılır. Bir canlının kemik fosilindeki Karbon-14 miktarının canlı dokulardaki Karbon-14 miktarına oranı ölçülerek canlının yaklaşık kaç yıl önce öldüğü tahmin edilmektedir. t yaşındaki fosilin sahip olduğu Karbon-14 miktarını $A(t)$ bulmak için canlı dokulardaki Karbon-14 miktarı A_0 kullanılır. Bu durum $A(t) = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$ şeklinde modellenir. Arkeologların bulduğu görseldeki kaplumbağa fosilindeki Karbon-14 miktarının canlı dokulardaki Karbon-14 miktarına oranı $\frac{1}{3}$ olarak tespit edilmiştir.

Buna göre kaplumbağa fosilinin yaklaşık yaşını hesaplayınız. ($\log_2 3 \approx 1{,}58$)

8. Örnek

Aşağıdaki uygun tanım ve değer kümesine sahip üstel ve logaritmik fonksiyonların ters fonksiyonlarıyla oluşturulan önermelerden yararlanarak fonksiyonların terslerinin cebirsel temsillerini bulunuz.

1. $f(x) = 2^x$

2. $g(x) = \log_3 x$

3. $h(x) = 2 \cdot 5^{x+1} - 3$

Çözüm

1. $f(x) = 2^x \Leftrightarrow \log_2 f(x) = x$ dönüşümü yapılarak $f^{-1}(x) = \log_2 x$ elde edilir.

2. $g(x) = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^{g(x)}$ dönüşümü yapılarak $g^{-1}(x) = 3^x$ elde edilir.

$a, b \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $a^c = b \Leftrightarrow c = \log_a b$

3. $h(x) = 2 \cdot 5^{x+1} - 3 \Leftrightarrow \frac{h(x)+3}{2} = 5^{x+1} \Leftrightarrow \log_5\left(\frac{h(x)+3}{2}\right) = x + 1 \Leftrightarrow \log_5\left(\frac{h(x)+3}{2}\right) - 1 = x$

dönüşümü yapılarak $h^{-1}(x) = \log_5\left(\frac{x+3}{2}\right) - 1$ elde edilir.

$a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyonun tersi olan $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ fonksiyonuna **logaritmik referans fonksiyon** denir. Burada a sayısına logaritmik fonksiyonun **tabanı** denir.

9. Örnek

İnsan kulağı belirli bir frekans aralığındaki sesleri duyabilmektedir. İnsan kulağının zarar görmeden duyabileceği en büyük ses şiddeti 1 watt/m^2dir. Ses düzeyini ölçmek için desibel (dB) ölçeği kullanılır. Kaynağın ses şiddeti I olmak üzere ses düzeyini (L) ses şiddetine bağlı olarak modelleyen fonksiyon $L = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ olmaktadır.

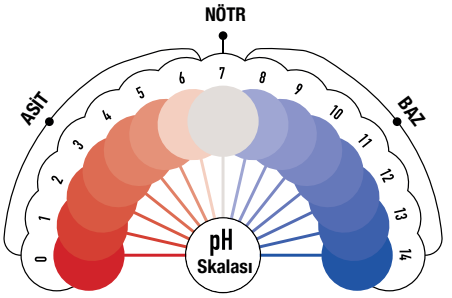
Bir kapalı spor salonunda gerçekleştirilen basketbol karşılaşmasında ses düzeyinin 70 dB olarak ölçülmesi durumunda ses şiddetinin kaç watt/m^2 olacağını bulunuz.

Çözüm

Basketbol müsabakasındaki 70 dB olan ses düzeyi, verilen modellemede kullanılarak $L = 70 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ denkleminde cebirsel işlemler yapılır. Buradan ses şiddeti I ya ulaşılır.

$70 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ ise $7 = \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ bulunur. Buradan ifade üstel biçimde yazılırsa $10^7 = \frac{I}{10^{-12}}$ ve bu eşitlikten $I = 10^{-5}$ watt/m^2 elde edilir.

Sıra Sizde 5



Maddelerin asitlik ve bazlık derecelerini kıyaslamak için kullanılan kavrama pH denir. pH değeri 0 ile 7 arasında olan maddeler asit, 7 ile 14 arasında olan maddeler bazdır. pH değeri 7'ye eşit olan maddeler nötrdür. $[H^+]$ değeri, 1 litre çözeltideki artı yüklü hidrojen iyonlarının mol sayısı olmak üzere pH değeri ve $[H^+]$ değeri arasındaki bağıntı $pH = -\log_{10}[H^+]$ eşitliği ile ifade edilir.

Buna göre $[H^+]$ değeri 10^{-6} mol/L olan bir maddenin pH değerini bularak asit ya da baz olma durumunu belirtiniz.

10. Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^{4x-1}$ şeklinde tanımlı üstel fonksiyonunun tersi olan f^{-1} logaritmik fonksiyonunun cebirsel temsilini bularak fonksiyonları artanlık-azalanlık yönünden inceleyiniz.

Çözüm

f üstel fonksiyon, $y = f(x) = 2^{4x-1} \Rightarrow \log_2 y = 4x - 1 \Rightarrow 1 + \log_2 y = 4x \Rightarrow x = \frac{1 + \log_2 y}{4}$ olur. Buradan f fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \frac{1 + \log_2 x}{4}$ olarak bulunur. f üstel fonksiyonunun tabanı $2 > 1$ olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}$ için f artan fonksiyondur. f fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan f^{-1} logaritmik fonksiyonunun grafiği de $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için artandır.

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Sıra Sizde 6

1. Genlik, bir dalganın en yüksek (ya da en düşük) noktası ile sıfır noktası arasındaki mesafedir. Genlik, dalgayı ortaya çıkaran enerjinin miktarına bağlıdır. Dalganın enerjisi artarken genlik de artar. Genlik arttıkça da depremin büyüklüğü artar. Depremin büyüklüğü deprem merkez üssünden belli uzaklıktaki sismograf tarafından kaydedilen dalganın maksimum genliğinden yararlanılarak hesaplanır.

R: Richter (Rihta) ölçeğine göre depremin büyüklüğü

d: maksimum genlik (mikron)

olmak üzere R ile d arasında $R = \log_{10} d$ eşitliği bulunmaktadır.

Buna göre maksimum genliği 10^5 mm olarak ölçülen bir depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğünü bulunuz. $(1\text{mm} = 10^3 \text{ mikron})$

2. İlaçlar uygun şekilde kullanıldığında hayat kurtarıcı olabilirken yanlış kullanıldıklarında hastalar için ciddi zararlar doğurabilmektedir. Bakteriyel enfeksiyonların tedavisinde kullanılan antibiyotikler mutlaka doktor gözetiminde alınmalıdır. Antibiyotiklerin doğru süre ve dozda kullanılmaması, tedavi başarısını azaltarak çeşitli olumsuz sonuçlara yol açabilmektedir. Bu bağlamda bir hastanın kullandığı antibiyotiğin vücutta kalan miktarının zamana (sa.) bağlı olarak azaldığı tespit edilmiştir. Bu azalış M_0, başlangıçtaki alınan antibiyotik miktarı (mg) olmak üzere $M(t) = M_0 \cdot (0,6)^t$ fonksiyonu ile modellenmiştir.

1000 mg'lık antibiyotik tedavisine başlayan bir hasta için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Hastanın vücudunda kalan antibiyotik miktarına bağlı geçen zamanı veren fonksiyonun cebirsel temsilini yazınız.

b) Hastanın vücudunda 216 mg antibiyotik kalması için kaç saat geçmesi gerektiğini bulunuz.

Araştırma Ödevi

Aşağıdaki adımları gerçekleştirerek araştırma ödevini öğretmeninizin belirlediği sürede eksiksiz şekilde tamamlayınız.

- Logaritmik fonksiyonların derste ele alınmayan farklı gerçek yaşam bağlamında kullanımına ilişkin örnek problem durumlarını araştırınız.
- Belirlediğiniz gerçek yaşam durumuna uygun bağımlı ve bağımsız değişkenleri içeren bir tablo oluşturunuz.
- Tablodaki veriler yardımıyla fonksiyonun cebirsel temsilini oluşturunuz ve grafiğini çiziniz.
- Yaptığınız çalışmanın tüm aşamalarını içeren bir rapor hazırlayıp sınıf arkadaşlarınıza sununuz.
- Çalışmanız analitik dereceli puanlama anahtarı kullanılarak öğretmeniniz tarafından değerlendirilecektir.

Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Matematik Tarihinden Notlar

John Napier (1550-1617)



Görsel 4.1: *John Napier (Temsilî)*

Logaritmayı bulan John Napier, (Can Nepiyır) İskoçyalı bir matematikçidir (Görsel 4.1). Sayısal hesaplamaları kolaylaştıracak bir yol ararken önce Napier'ın kemikleri olarak bilinen, üzerinde rakamlar yazılı küçük değnekler yardımıyla yapılan bir çarpma-bölme metodu bulmuştur.

- 1614'te yazdığı *Logaritma Kurallarının Tanımı* adlı eserinde aritmetik dizi ile geometrik diziyi karşılaştırarak matematiğe logaritma kavramını kazandırmıştır.
- 1, 2, 3, ... biçimindeki aritmetik dizi ile buna karşılık gelen 10, 100, 1000, ... biçimindeki geometrik dizi arasındaki ilişkiyi fark etmiştir.

(Genel ağdan alınmıştır.)

Gelenbevî İsmail Efendi (1730-1791)



Görsel 4.2: *Gelenbevî İsmail Efendi (Temsilî)*

Matematik ve mantık alanlarındaki çalışmalarıyla bilinen Osmanlı âlimi İsmail Gelenbevî, 1730 yılında Manisa'nın Kırkağaç ilçesine bağlı Gelenbe kasabasında doğmuştur (Görsel 4.2).

- Gelenbevî, logaritma cetvellerinin nasıl kullanılacağını anlattığı *Logaritma Şerhi* adıyla da bilinen *Şerh-i Cedavil-i Ensab* adlı eseri ile matematikçilerin yolunu aydınlatmıştır.
- Matematik, astronomi, mantık, felsefe, kelam ve tasavvufla ilgili 35'in üzerinde eser vermiştir.

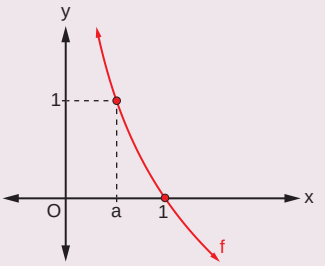
Gelenbevî, III. Selim döneminde humbaracıların (topçuların) başarısız atışlar yapmasının üzerine padişahın emri ile toplardaki açıları riyazi hesaplarla düzenlemiş ve atışların daha isabetli yapılmasını sağlamıştır.

Kontrol Noktası

- $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x\ (a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$ şeklinde tanımlı logaritmik referans fonksiyonun tabanındaki a sayısı $0 < a < 1$ olduğunda f azalan fonksiyon, $a > 1$ olduğunda f artan fonksiyon olur.

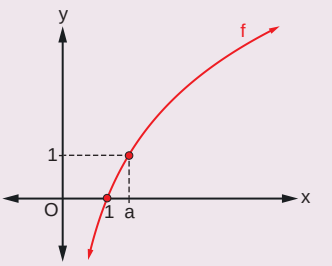
$0 < a < 1$

x	0		a		1	
$\log_a x$	‖	↘	1	↘	0	↘



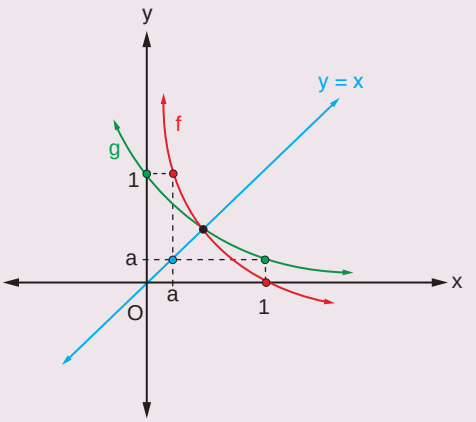
$a > 1$

x	0		1		a	
$\log_a x$	‖	↗	0	↗	1	↗

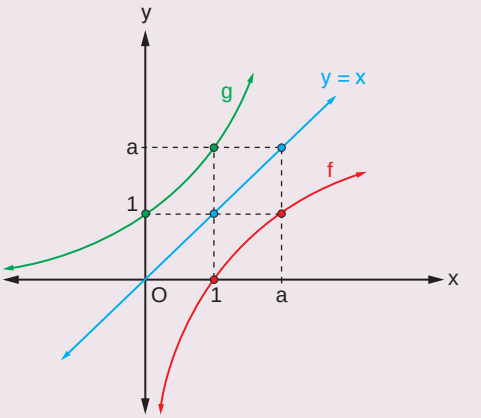


- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ g(x) = a^x$ ve $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_a x\ (a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$ şeklinde tanımlı g ve f fonksiyonları $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

$0 < a < 1$



$a > 1$



Ek soruların yer aldığı 2. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Üstel Fonksiyonların Tersi Olan Fonksiyonlar)

Alıştırmalar

1. Pozitif gerçek sayılarda $f(x) = \ln x$ ve $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar veriliyor.

Buna göre

I. **f ve g fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.**

II. **f fonksiyonu artan fonksiyondur.**

III. **$g(5) > g(8)$ dir.**

IV. **f fonksiyonu doğal logaritmik referans fonksiyondur.**

ifadelerinden hangileri doğrudur?

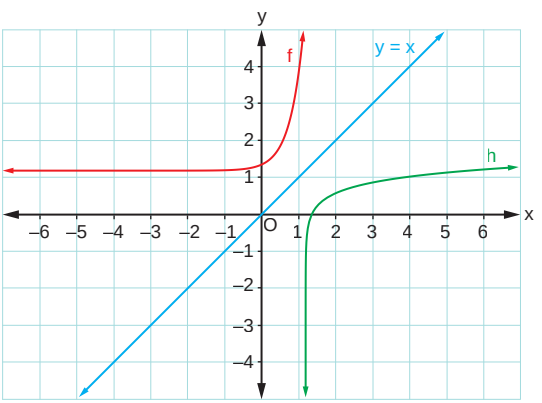
2. 4 milyon nüfuslu bir şehrin yıllık nüfus artış hızı %3'tür.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) **Nüfusu veren fonksiyonun cebirsel temsilini zamana (yıl) bağlı şekilde modelleyerek bulunuz.**

b) **n, şehrin nüfus miktarı olmak üzere şehir nüfusunun n milyon olması için gereken zamanı ifade eden g fonksiyonunu bulunuz.**

3.



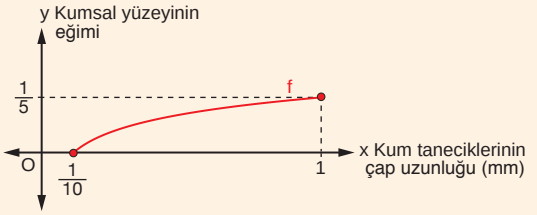
Yanda dik koordinat sisteminde gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^{2x} + 1$ üstel fonksiyonun grafiği, $y = x$ doğrusu ve pozitif gerçek sayılarda tanımlı $h(x) = a \cdot \log_3(bx + c)$ logaritmik fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f ve h fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetrik olmaktadır.

Buna göre $a \cdot b \cdot c$ değerini bulunuz.

4.3. LOGARİTMİK FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

Konuya Başlarken

Oşinografi; deniz ve okyanusların fiziksel, kimyasal, biyolojik ve jeolojik özelliklerini inceleyen disiplinler arası bir bilim dalıdır.



Grafik 4.3: *f fonksiyonunun grafiği*

Yapılan bir araştırmaya göre kumsal yüzeyinin eğimini kumsaldaki kum taneciklerinin ortalama çap uzunluğuna bağlı olarak modelleyen f fonksiyonu $f(x) = \frac{1 + \log_{10} x}{5}$ olmaktadır. Bu modele ait $\left[\frac{1}{10}, 1\right]$ nda tanımlı f fonksiyonunu Grafik 4.3'te verilmiştir.

Buna göre

1. **Kumsalın farklı bölgelerindeki kum taneciklerine ait çap uzunluklarının aynı olup olamayacağına dair fikirlerinizi yazınız.**
2. **Kum taneciklerinin çap uzunlukları arttıkça kumsalın eğimi nasıl değişir? Fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.**

5. Uygulama

Logaritmik Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. Bir teknoloji şirketi, yeni bir dosya sıkıştırma algoritması geliştirmiştir. Dosya boyutu x MB (megabayt) $(x > 1, x \in \mathbb{N})$ olmak üzere sıkıştırılmış dosya boyutu $f(x) = \log_2 x$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyonla modellenmektedir.

   a) Tablo 1'de verilen dosya boyutları için $y = f(x)$ değerlerini hesaplayınız. Elde ettiğiniz değerleri kullanarak tabloyu örnekteki gibi doldurunuz. (n, satır numarası)

Tablo 1

Dosya Boyutu x MB	Sıkıştırılmış Dosya Boyutu $y = \log_2 x$ (MB)	$A_n(x, y)$
2		
3		
4		
5		
8		
16	$\log_2 16 = 4$	$A_6(16, 4)$
32		

b) Tablodaki bilgilerden yararlanarak dosya boyutuna bağlı olarak sıkıştırılmış dosya boyutunu veren f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

2. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

1. adım: Cebir menüsünü açınız, **Giriş** bölümüne $f(x) = \log_2 x$ yazınız.

2. adım: Aynı işlemi $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ fonksiyonun grafiğini çizmek için kullanınız.

Matematik yazılımı yardımıyla elde edilen f ve g logaritmik referans fonksiyonlarına ait grafikleri inceleyerek logaritmik referans fonksiyonların değerlerinin rasyonel değerler olup olmadığına dair sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışarak çıkarımlarda bulununuz.

3. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \log_2 x$ ve $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ şeklinde tanımlı f ve g fonksiyonlarının nitel özelliklerini bularak Tablo 2'yi uygun şekilde doldurunuz.

Tablo 2

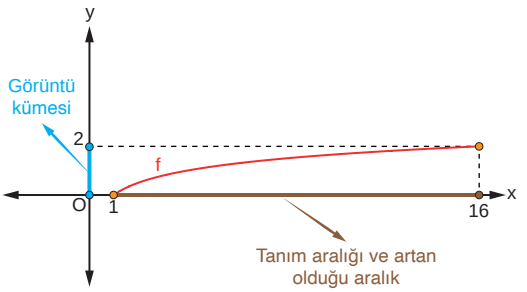
Nitel Özellikler		**f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$**	**g: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$**
Tanım Kümesi			
Görüntü Kümesi			
Bire Bir Olma Durumu			
Örten Olma Durumu			
Maksimum Noktası ve Değeri			
Minimum Noktası ve Değeri			
Teklik-Çiftlik			
Artanlık-Azalanlık			
Sıfırı			
İşareti	(+)		
	(−)		

11. Örnek

$f:[1,16] \to [0,2], f(x) = \log_4 x$ şeklinde tanımlı logaritmik fonksiyonun nitel özelliklerini bulunuz.

Çözüm

Verilen tanım ve değer aralığı dikkate alınarak çizilmiş $f(x) = \log_4 x$ şeklinde tanımlı f logaritmik referans fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir. f fonksiyonun tanım kümesi $[1,16]$ görüntü kümesi $[0,2]$ dır.



Grafik incelendiğinde tanım aralığındaki her x değerine karşılık gelen f değerleri de farklı olduğundan f bire bir fonksiyondur. Değer aralığındaki her f değeri tanım aralığındaki bir x değerine karşılık geldiğinden f fonksiyonu örtendir.

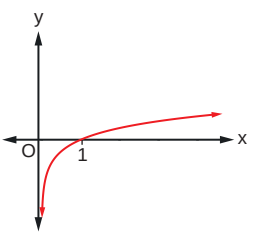
f fonksiyonunun sıfırı $f(x) = \log_4 x = 0$ için $x = 1$ olur. Grafik incelendiğinde f fonksiyonunun $(1,16]$ nda daima pozitif değerler aldığı görülür.

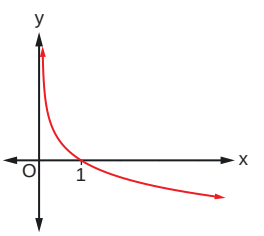
$\forall x_1, x_2 \in [1,16]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu $[1,16]$ nda artandır. f fonksiyonunun verilen aralıkta maksimum değeri 2, maksimum değeri veren nokta $x = 16$'dır. Minimum değeri 0, minimum değeri veren nokta $x = 1$'dir. f logaritmik fonksiyonu tek ya da çift fonksiyon değildir.

Sıra Sizde 7

Aşağıda logaritmik referans fonksiyonlara ait bazı nitel özellikler, cebirsel ve grafik temsili örnekleri verilmiştir.

	Nitel Özellikler (N)	Cebirsel Temsiller (C)	Grafik Temsilleri (G)
N_1	• Artan fonksiyondur. • Bire bir ve örten fonksiyondur. • Fonksiyon işaretinin $(+)$ olduğu aralık $(1,\infty)$ dır.	C_1: $a(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ $b(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ $c(x) = \log_{\frac{5}{6}} x$	G_1
N_2	• Azalan fonksiyondur. • Bire bir ve örten fonksiyondur. • Fonksiyon işaretinin $(-)$ olduğu aralık $(1,\infty)$ dır.	C_2: $d(x) = \log_7 x$ $e(x) = \log_3 x$ $h(x) = \ln x$	G_2





Logaritmik referans fonksiyonlara ait nitel özellikleri kullanarak bu fonksiyonların grafik ve cebirsel temsillerini doğru biçimde eşleştiriniz.

Tabanı 10 olan logaritmik referans fonksiyona **onluk (bayağı) logaritmik referans fonksiyon** denir. Onluk logaritmik referans fonksiyon $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{10} x$ veya $f(x) = \log x$ şeklinde gösterilir.

6. Uygulama

Logaritmik Referans Fonksiyonun İşlem Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. Logaritmik referans fonksiyonların yer aldığı Tablo 1 ve Tablo 2'deki boş bırakılan yerleri örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

	$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = \log_3 x$	$h(x) = \log_5 x$
a ve b değerleri	$a = 2$ ve $b = 4$	$a = 1$ ve $b = 9$	$a = 25$ ve $b = 125$
f(a)	$f(2) = \log_2 2 = 1$		
f(b)			
f(a · b)			
f(a) + f(b)	$\log_2 2 + \log_2 4 = 3$		
Elde Edilen Eşitlik	$\log_2 2 + \log_2 4 = \log_2 (2 \cdot 4)$		

Tablo 2

	$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = \log_6 x$	$h(x) = \log x$
a ve b değerleri	$a = 4$ ve $b = 8$	$a = 216$ ve $b = 36$	$a = 10\,000$ ve $b = 100$
f(a)	$f(4) = \log_2 4 = 2$		
f(b)			
$\frac{f(b)}{f(a)}$			
$\log_a b$	$\log_4 8 = \frac{3}{2}$		
Elde Edilen Eşitlik	$\frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \log_4 8$		

2. $f(x) = \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$) şeklinde verilen logaritmik referans fonksiyonların yer aldığı Tablo 3'teki boş bırakılan yerleri örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3

	b değerleri	**f(b)**	$a^{f(b)}$	**Elde Edilen Eşitlik**
$a = 2$ $f(x) = \log_2 x$	$b = 16$	$f(16) = \log_2 16 = 4$	$2^{\log_2 16} = 2^4 = 16$	$2^{\log_2 16} = 16$
$a = 7$ 	$b = 49$			
$a = 10$ 	$b = 1000$			

3. Tablolardan elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak logaritmanın işlem özellikleri ile ilgili varsayımlarda bulununuz.

4. Elde ettiğiniz varsayımlardan hareketle logaritmanın işlem özellikleri ile ilgili genellemeler yapınız.

5. Matematik yazılımlarından yararlanarak aşağıdaki adımları gerçekleştiriniz ve soruyu cevaplayınız.

1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan a ve b sürgülerini tanımlayarak aralığı a sürgüsü için 2 ile 10; b sürgüsü için -5 ile 5 olarak seçiniz.

2. adım: Giriş kısmına $f(x) = \log_a(x^b)$ yazarak grafiğini çiziniz.

3. adım: Giriş kısmına $g(x) = b \cdot \log_a(x)$ yazarak grafiğini çiziniz.

Oluşan f ve g fonksiyonlarının grafiklerindeki noktaları $x > 0$ için karşılaştırarak değişimleri gözlemleyiniz. Gözlemlerinizden yararlanarak genellemelerinizin varsayımlarınızı karşılayıp karşılamadığını kontrol ediniz.

6. Genellemelerinizden hareketle logaritmanın işlem özellikleri ile ilgili matematiksel olarak doğrulanabilecek önermeler elde ediniz.

7. Elde ettiğiniz önermelerin gerçek yaşam bağlamındaki kullanışlılığını aşağıdaki problemi çözerek değerlendiriniz.

R: Richter ölçeğine göre depremin büyüklüğü
d: maksimum genlik (mikron)
R ile d arasında $R = \log d$ eşitliği vardır. Farklı zamanlarda gerçekleşen iki depremden birincisi için maksimum genlik $d_1 = 32 \cdot 10^{10}$ mikron, ikincisi için maksimum genlik $d_2 = 4 \cdot 10^4$ mikrondur.
Buna göre ilk depremin ikinci depremin kaç katı büyüklüğünde olduğunu hesaplayınız.

8. Elde ettiğiniz önermeleri grafiksel olarak doğrulamak veya cebirsel olarak ispatlamak için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) "$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ $(a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1)$ şeklinde bir logaritmik referans fonksiyon tanımlanıyor. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ için $f(x_1) - f(x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ eşitliği sağlanır." ifadesinin doğruluğunu cebirsel olarak ispatlayınız.

b) "$f, g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$ ve $g(x) = \log_{2^a} x^b$ $(\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ şeklinde logaritmik fonksiyonlar tanımlanıyor. Aşağıdaki adımları matematik yazılımında gerçekleştiriniz ve "$g(x) = \frac{b}{a} \cdot f(x)$ eşitliği tüm pozitif gerçek sayılarda sağlanır." ifadesini oluşturduğunuz grafikler yardımıyla doğrulayınız.

1. adım: Matematik yazılımını açarak **Sürgü** kısmını seçiniz. Buradan a ve b sürgülerini oluşturunuz.

2. adım: **Giriş** bölümüne $f(x) = \log_2 x$ yazınız.

3. adım: **Giriş** bölümüne $g(x) = \frac{b}{a} \cdot f(x)$ yazınız.

4. adım: **Giriş** bölümüne $h(x) = \log_{2^a} x^b$ yazınız.

5. adım: Oluşan fonksiyon grafiklerinde a ve b sürgülerini hareket ettirerek grafiklerdeki değişimleri gözlemleyiniz.

Logaritmanın işlem özelliklerinin ispatı ile ilgili Çalışma Kağıdı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

9. İşe koştuğunuz grafiksel doğrulama ve cebirsel ispat yöntemlerinin farklı durumlardaki kullanışlılığını ve sınırlılığını değerlendiriniz.

12. Örnek

"$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ için $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ olur." önermesini cebirsel temsillerden yararlanarak ispatlayınız.

Çözüm

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $p, q \in \mathbb{R}$ olmak üzere önermenin ispatı aşağıda verilmiştir.

I. $\log_a x = p$ ve $\log_a y = q$ olarak seçilirse logaritmanın tersi alınarak $x = a^p$ ve $y = a^q$ eşitlikleri elde edilir.

II. $x = a^p$ ve $y = a^q$ eşitlikleri taraf tarafa çarpılır. Buradan $x \cdot y = a^p \cdot a^q$ elde edilir.

III. $x \cdot y = a^p \cdot a^q$ eşitliği, üslü ifadelerdeki işlemler uygulanarak $x \cdot y = a^{p+q}$ elde edilir.

IV. $x \cdot y = a^{p+q}$ eşitliğinde üstel fonksiyonun tersi alınarak $\log_a(x \cdot y) = p + q$ bulunur.

V. $\log_a(x \cdot y) = p + q$ eşitliğinde $\log_a x = p$ ve $\log_a y = q$ yerine yazılırsa $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ bulunur.

13. Örnek

Aşağıdaki soruları logaritmanın işlem özelliklerine yönelik oluşturduğunuz önermelerden yararlanarak cevaplayınız.

1. $\log_8 2 + \log_5 5$ işleminin sonucunu bulunuz.

2. $\log 2 \approx 0,301$ değeri veriliyor. Buna göre log5'in yaklaşık değerini hesaplayınız.

Çözüm

1. $\log_8 2 = \log_8 \sqrt[3]{8} = \log_8 8^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_8 8 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ bulunur.

$\log_5 5 = 1$ olur. Buradan $\log_8 2 + \log_5 5 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ elde edilir.

2. $\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,301 = 0,699$ elde edilir.

Sıra Sizde 8

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Büyük bir kutunun içine yeşil, mavi ve kırmızı dikdörtgen şeklindeki kutucuklar Şekil 1'de gösterildiği gibi dizilmiştir. Kırmızı iki kutucuğun yan yana getirilmesiyle Şekil 2 elde edilmiştir.
Buna göre Şekil 2'de verilen $|KM|$ kaç cm'dir? ($\log 3 \approx 0,477$ ve $\log 2 \approx 0,301$)



Şekil 1



Şekil 2

2. **Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.**

a) $\log_{\sqrt{2}} 1 - \ln 1 + 4 \cdot \log 10$

b) $5 \cdot \ln e + 2 \cdot \log 1 - 3 \cdot \log_7 7$

c) $\log_2 16 + \ln e^2 - \log 1000$

ç) $\log_{\sqrt{5}} 5 - \log 0,1 - \log_2 0,25$

3. **Aşağıdaki soruları cevaplayınız.**

a) $\log_5 2 = m$ **ve** $\log_3 5 = \frac{1}{n}$ **olmak üzere** $\log_5 12$ **ifadesinin m ve n türünden eşitini bulunuz.**

b) $\log_6 36! = a$ **olduğuna göre** $\log_6 35!$ **ifadesinin a türünden eşitini bulunuz.**

c) $\log_2 5 = b$ **olduğuna göre** $\log_2\left(\frac{25}{8}\right)$ **ifadesinin b türünden eşitini bulunuz.**

14. Örnek

Logaritmanın temel işlem özelliklerini kullanarak aşağıdaki problemleri çözünüz.

1. $8^{2+\log_8 2} + 3^{\log_9 25}$ işleminin sonucunu bulunuz.
2. $5^{\log_7 x} + x^{\log_7 5} = 50$ eşitliği veriliyor. Buna göre denklemi sağlayan x değerini bulunuz.

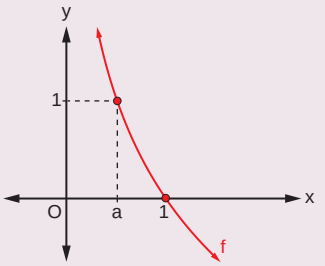
Çözüm

1. $8^{2+\log_8 2} = 8^2 \cdot 8^{\log_8 2} = 64 \cdot 2 = 128$ elde edilir. $3^{\log_9 25} = 3^{\log_{3^2} 5^2} = 3^{\frac{2}{2} \cdot \log_3 5} = 3^{\log_3 5} = 5$ elde edilir. Buna göre $8^{2+\log_8 2} + 3^{\log_9 25} = 128 + 5 = 133$ bulunur.
2. $x = 7^{\log_7 x}$ olduğundan toplama işleminin ikinci teriminde yer alan x yerine $7^{\log_7 x}$ yazılır. $x^{\log_7 5} = (7^{\log_7 x})^{\log_7 5} = 7^{\log_7 x \cdot \log_7 5} = (7^{\log_7 5})^{\log_7 x} = 5^{\log_7 x}$ olur. Buna göre $5^{\log_7 x} + x^{\log_7 5} = 2 \cdot 5^{\log_7 x}$ elde edilir. $2 \cdot 5^{\log_7 x} = 50$ eşitliğinden $5^{\log_7 x} = 25 = 5^2$ olur. Buradan $\log_7 x = 2$ olduğu için $x = 49$ olarak bulunur.

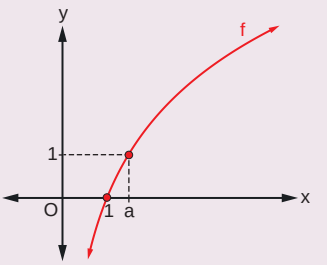
Kontrol Noktası

Aşağıda $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$) şeklinde tanımlanan logaritmik referans fonksiyonun grafikleri verilmiştir.

$0 < a < 1$



$a > 1$



- Logaritmik referans fonksiyonun
  - » Tanım kümesi $\mathbb{R}^+$, görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dır.
  - » $a > 1$ için f artan, $0 < a < 1$ için f azalandır.
  - » Maksimum ve minimum noktaları yoktur.
  - » Sıfırı 1'dir.
  - » İşareti $a > 1$ için $(0, 1)$ nda negatif, $(1, \infty)$ nda pozitif; $0 < a < 1$ için $(0, 1)$ nda pozitif, $(1, \infty)$ nda negatiftir.
- Logaritmik referans fonksiyon bire bir ve örtendir.
- Logaritmik referans fonksiyon tek veya çift fonksiyon değildir.

Logaritma Özellikleri

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $\forall m, n \in \mathbb{R}$ ve $m \neq 0$ olmak üzere logaritma işlem özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
- $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$
- $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a b$
- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$
- $a^{\log_a b} = b$
- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Logaritmik Referans Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonlar

Logaritmik referans fonksiyonlardaki dönüşümler incelenerek bu fonksiyonların grafiklerinin gerilmesi veya sıkıştırılması, simetri ve ötelenme özelliklerindeki değişiklikler analiz edilebilir.

7. Uygulama

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ $(a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$ Şeklinde Tanımlı Logaritmik Referans Fonksiyondan Türetilen $g(x) = k \cdot f(mx + r) + s$ $(k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ Logaritmik Fonksiyonunun Nitel Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıdaki adımları gerçekleştiriniz.

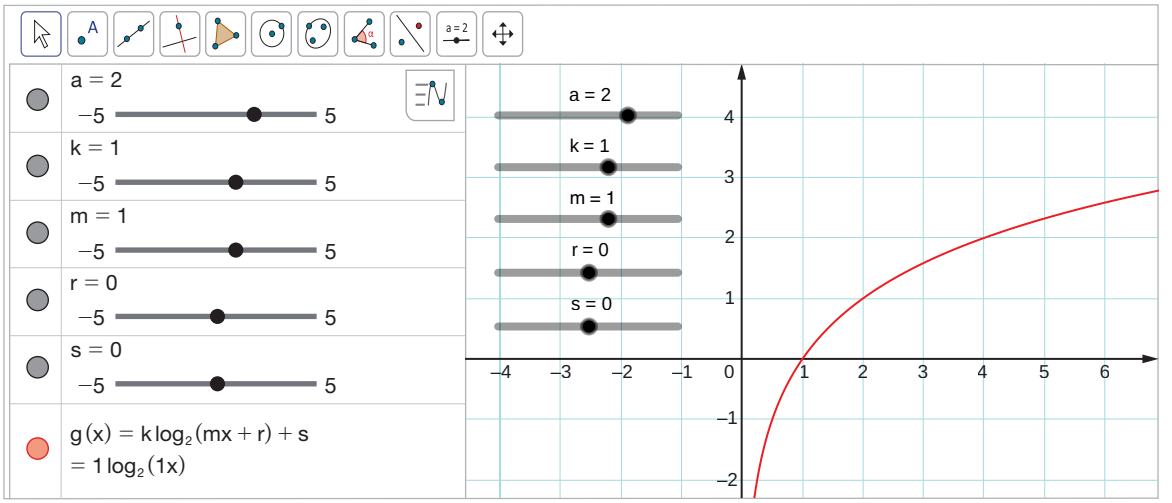
1. adım: Araçlar menüsünden **Sürgü** aracını seçiniz. Sayısal değerler alan a, k, m, r ve s sürgülerini tanımlayarak aralığı -5 ile 5 olarak seçiniz.

2. adım: a sürgüsünü 2 seçerek cebir menüsünden **Giriş** bölümüne $g(x) = k \cdot \log_2(mx + r) + s$ yazarak giriş yapınız.

3. adım: Sürgüleri $k = 1, m = 1, r = 0$ ve $s = 0$ seçerek $g(x) = \log_2 x$ logaritmik referans fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Konu ile ilgili videoya yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



a) $m = 1, r = 0, s = 0$ ve $k \neq 0$ iken k sürgüsüne Tablo 1'deki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Fonksiyon İsmi	k Sürgüsünün Değeri	Oluşan Logaritmik Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = k \cdot \log_2(mx + r) + s$	Logaritmik Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Logaritmik Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 2$	$h(x) = 2 \log_2 x$	Her bir bağımsız değişkenine karşılık gelen değeri 2 ile çarpma	2 kat yatay gerilme
n	$k = -2$			
t	$k = 4$			
p	$k = \frac{1}{2}$			

b) $m = 1, r = 0$ ve $k \neq 0$ iken k ve s sürgüsüne Tablo 2'deki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 2

Fonksiyon İsmi	k ve s Sürgüsünün Değeri	Oluşan Logaritmik Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x)=k\cdot\log_2(mx+r)+s$	Logaritmik Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Logaritmik Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1$, $s = 2$	$h(x) = \log_2 x + 2$	Her bir bağımsız değişkene karşılık gelen fonksiyon değerine 2 ekleme	y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme
n	$k = -1$, $s = 4$			
t	$k = 3$, $s = -2$			
p	$k = -2$, $s = -\frac{1}{2}$			

c) $m \neq 0, r = 0$ ve $k \neq 0$ iken k, s ve m sürgüsüne Tablo 3'teki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3

Fonksiyon İsmi	k, s ve m Sürgüsünün Değeri	Oluşan Logaritmik Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x)=k\cdot\log_2(mx+r)+s$	Logaritmik Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Logaritmik Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k = 1$, $s = 0$, $m = 4$	$h(x) = \log_2 4x$	Her bir bağımsız değişkeni 4 ile çarpma	4 kat yatay sıkıştırma
n	$k = -2$, $s = 1$, $m = 3$			
t	$k = 1$, $s = 0$, $m = 2$			
p	$k = -4$, $s = -\frac{1}{2}$, $m = 1$			

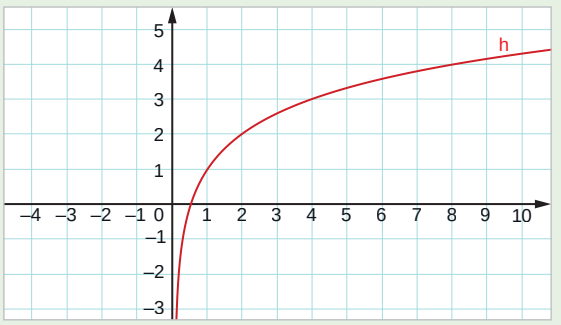
ç) $m \neq 0$ ve $k \neq 0$ iken k, s, m ve r sürgüsüne Tablo 4'teki değerleri giriniz. Elde ettiğiniz grafik çizimlerinden yararlanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan kısımları örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 4

Fonksiyon İsmi	k, s, m ve r Sürgüsünün Değeri	Oluşan Logaritmik Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x)=k\cdot\log_2(mx+r)+s$	Logaritmik Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Logaritmik Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$k=3, s=0, m=1$ ve $r=2$	$h(x)=3\cdot\log_2(x+2)$	Her bir bağımsız değişkenin 2 fazlasının fonksiyon değerini 3 ile çarpma	x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme ve 3 kat dikey gerilme
n	$k=2, s=0, m=2$ ve $r=3$			
t	$k=3, s=-1, m=2$ ve $r=1$			
p	$k=-1, s=1, m=-2$ ve $r=0$			

2. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}, f(x)=\log_2 x$ şeklinde tanımlı f logaritmik referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümler sonucunda elde edilen logaritmik fonksiyonların cebirsel ve grafik temsillerini bularak Tablo 5'i örnekteki gibi doldurunuz. Grafik temsilini matematik yazılımlarını kullanarak oluşturunuz.

Tablo 5

f Fonksiyonunun Grafiğine Uygulanan Dönüşüm	Cebirsel Temsil	Grafik Temsili
y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme	$h(x)=\log_2 x+1$	

2 kat dikey sıkıştırma ve x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim öteleme		
y eksenine göre yansıma ve x ekseni boyunca negatif yönde 3 birim öteleme		

Grafik temsilinden cebirsel temsile dönüşüm ile ilgili Çalışma Kağıdı'na ve Öz Değerlendirme Formu'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

3. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$ şeklinde tanımlı f logaritmik referans fonksiyonun nitel özelliklerinden hareketle Tablo 6 ve Tablo 7'de cebirsel temsili verilen logaritmik fonksiyonun nitel özellikleri ile ilgili varsayımlarınızı örnekteki gibi ifade ediniz.

Tablo 6

$h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, h(x) = 1 + 2 \cdot \log_2 x$	
Nitel Özellikler	**Varsayımlar**
Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	
Bire Birliği	Bire bir fonksiyondur.
Örtenliği	
Periyodu	
Sıfırı	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	
Artanlığı-Azalanlığı	
Tekliği-Çiftliği	

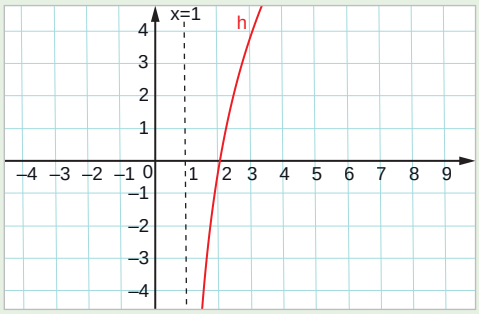
Tablo 7

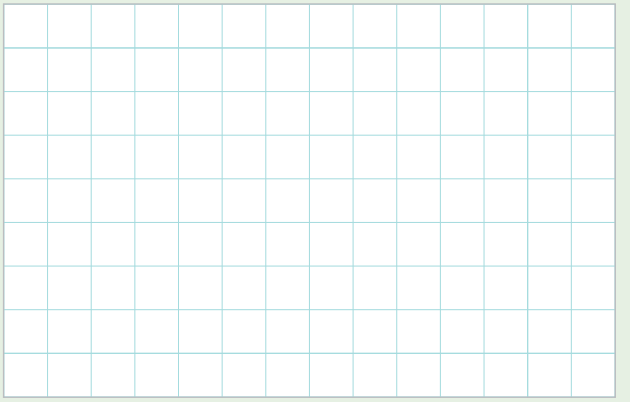
$g(x) = k \cdot \log_a(mx + r) + s \; (a > 0 \text{ ve } a \neq 1) \; (k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$	
Nitel Özellikler	**Varsayımlar**
Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	
Bire Birliği	
Örtenliği	
Periyodu	
Sıfırı	
İşareti	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	Maksimum ve minimum noktası yoktur.
Artanlığı-Azalanlığı	
Tekliği-Çiftliği	

4. Aşağıda $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$ şeklinde tanımlı f logaritmik referans fonksiyonundan türetilmiş bazı fonksiyonlar verilmiştir.

a) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz, Tablo 8'i istenen nitel özellikler ile örnekteki gibi doldurunuz.

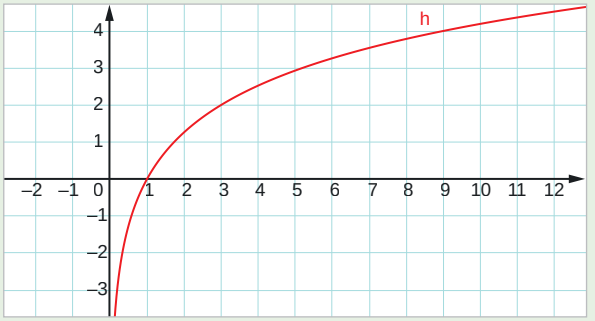
Tablo 8

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	Tanım Kümesi	Sıfırlar
$h(x) = 4 \cdot \log_2(x - 1)$	Grafik		
		Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun $x = 1$ doğrusunun sağında tanımlı olduğu görülür. Bu nedenle h fonksiyonu $(1, \infty)$ nda tanımlı olmaktadır.	Grafik incelendiğinde f logaritmik referans fonksiyonunun grafiğinin 4 kat dikey gerilmesiyle ve x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim ötelenmesiyle h fonksiyonunun grafiğinin oluştuğu görülür. Bu ötelenme sonucunda h fonksiyonunun sıfırı $x = 2$ noktası olur.
	Cebirsel	f logaritmik referans fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ da tanımlıdır. $h(x) = 4 \cdot f(x-1) = 4 \cdot \log_2(x-1)$ olur. h fonksiyonun tanımlı olması için $x - 1 > 0$ olmalıdır. Bu nedenle h fonksiyonunun tanım kümesi $(1, \infty)$ olur.	Burada $h(x) = 0$ için $x - 1 = 1$ olmalıdır. Bu nedenle h fonksiyonun sıfırı $x = 2$ olur.

$n(x) = 1 + 2 \cdot \ln 3x$	Grafik		
	Cebirsel		
$t(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x + 8$	Grafik		
	Cebirsel		

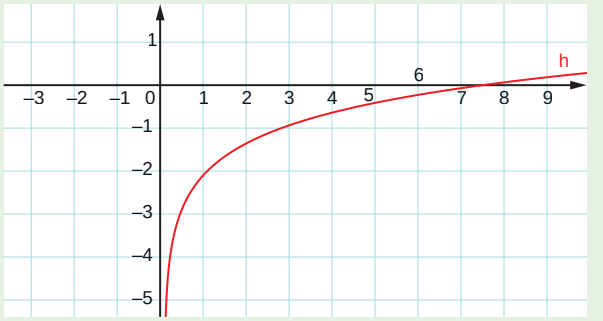
b) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz, Tablo 9'u istenen nitel özellikler ile örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 9

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	İnceleme Türü	İşareti	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar
$h(x) = 2\log_3 x$	Grafik		
		Grafik incelendiğinde h fonksiyonu $(0, 1)$ nda negatif, $(1, \infty)$ nda pozitif değerli olmaktadır.	Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun değerlerinin $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için arttığı görülür. h fonksiyonu artandır.
	Cebirsel	Fonksiyon $x > 0$ için tanımlıdır. $h(x) = 2 \cdot \log_3 x > 0$ olması için $x > 3^0 \Rightarrow x > 1$ olmalıdır. $h(x) = 2 \cdot \log_3 x < 0$ olması için $x < 3^0 \Rightarrow x < 1$ olmalıdır. Fonksiyon $x > 1$ için pozitif, $0 < x < 1$ için negatif değer alır.	h fonksiyonunun tabanı $x = 3$'tür. h fonksiyonunun tabanı 1'den büyüktür. Bu nedenle h fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için artandır.
$n(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$	Grafik		
	Cebirsel		

c) Verilen fonksiyonların grafiklerini matematik yazılımlarını kullanarak çiziniz, Tablo 10'u istenen nitel özellikler ile örnekteki gibi doldurunuz.

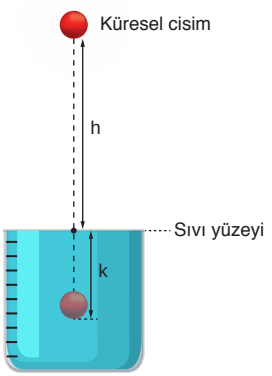
Tablo 10

<table>
<tr><th>Fonksiyonun Cebirsel Temsili</th><th>İnceleme Türü</th><th>Görüntü Kümesi</th><th>Bire birlik</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$h(x) = \ln x - 2$</td><td rowspan="2">Grafik</td><td colspan="2"> 
</td></tr>
<tr><td>Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun tüm değerleri alabildiği görülmektedir. Bu nedenle görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dır.</td><td>Grafik incelendiğinde h fonksiyonunun tanım kümesindeki her x değerine karşılık gelen değerin farklı olduğu görülmektedir. h fonksiyonu bire birdir.</td></tr>
<tr><td>Cebirsel</td><td>f logaritmik referans fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dır. $h(x) = f(x) - 2 = \ln x - 2$ olduğu için h fonksiyonunun da görüntü kümesi $\mathbb{R}$ olur.</td><td>$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ için
$h(x_1) = \ln(x_1) - 2$ ve
$h(x_2) = \ln(x_2) - 2$ olur.
Buna göre $x_1 \neq x_2$ için
$\ln(x_1) - 2 \neq \ln(x_2) - 2$ olur.
Buradan $h(x_1) \neq h(x_2)$ elde edilir. h fonksiyonu bire birdir.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$n(x) = 4 \cdot \ln x + 1$</td><td rowspan="2">Grafik</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Cebirsel</td><td></td><td></td></tr>
</table>

5. Yaptığınız çalışmalardan elde ettiğiniz nitel özellikleri kullanarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f logaritmik referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot \log_a(mx + r) + s$ $(a > 0$ ve $a \neq 1)$ $(k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

6. Oluşturduğunuz varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak uygun tanım ve değer kümesine sahip f logaritmik referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = k \cdot \log_a(mx + r) + s$ $(a > 0$ ve $a \neq 1)$ $(k, m, r, s \in \mathbb{R}, k \neq 0, m \neq 0)$ fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz. Oluşturduğunuz önermeyi sözel veya cebirsel olarak ifade ediniz.

7. Elde ettiğiniz önermelerin gerçek yaşam bağlamındaki kullanışlılığını, aşağıdaki problem durumunu inceleyip soruları cevaplayarak değerlendiriniz.



Tamamen sıvı ile dolu 10 birim derinliğinde bir kaba h birim yükseklikten sıvı ile aynı yoğunlukta küresel bir cisim bırakılmaktadır. Cisim, şekildeki gibi sıvı yüzeyinin k birim altına inmektedir.h ye bağlı k fonksiyonu $k(h) = \log_2(h + 1)$ şeklinde modellenmiştir. (cismin hacmi önemsizdir.)

a) Küresel cismin en fazla 63 birim yükseklikten bırakıldığı bilindiğine göre cismin inebileceği derinliğin kaç birim olduğunu gösteren değer aralığını bulunuz.

b) Küresel bir cisim, kabın içerisine h_1 yüksekliğinden bırakıldığında 5 birim derinliğe inmektedir. Buna göre h_1 değerinin kaç birim olduğunu bulunuz.

8. Elde ettiğiniz önermeleri grafiksel olarak doğrulamak veya cebirsel olarak ispatlamak için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) "f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$ şeklinde tanımlanan logaritmik referans fonksiyona yapılan dönüşümler ile elde edilen $g(x) = \log_2(mx + n)$ $(m \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{R})$ şeklinde tanımlı logaritmik fonksiyonun tanım kümesi $\left(-\frac{n}{m}, \infty\right)$ dır." önermesini ispatlayınız.

b) "f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$ şeklinde tanımlanan logaritmik referans fonksiyona yapılan dönüşümler sonucunda elde edilen $g(x) = \log_2(mx + n)$ $(m, n \in \mathbb{R}$ ve $m \neq 0)$ şeklinde tanımlı logaritmik fonksiyonun $g^{-1}(x) = \frac{2^x - n}{m}$ şeklinde cebirsel temsili olan üstel fonksiyondur." önermesinin doğruluğunu aşağıdaki adımları matematik yazılımında gerçekleştirerek grafiksel olarak doğrulayınız.

1. adım: Matematik yazılımını açarak **Sürgü** kısmını seçiniz. Buradan m ve n sürgülerini oluşturunuz.

2. adım: Giriş bölümüne $g(x) = \log_2(mx + n)$ yazınız.

3. adım: Giriş bölümüne $y = x$ yazarak grafiğini çiziniz.

4. adım: Giriş bölümüne $g^{-1}(x) = \frac{2^x - n}{m}$ yazarak grafiğini çiziniz.

5. adım: Oluşan fonksiyon grafiklerinde m ve n sürgülerini hareket ettirerek grafikteki değişimleri gözlemleyiniz.

9. İşe koştuğunuz doğrulama ve ispat yöntemlerinizin farklı durumlardaki kullanışlılığını aşağıdaki soruyu çözerek değerlendiriniz.

Bir mühendis, elektronik bir cihazın belirli bir uyarana verdiği tepkiyi incelemektedir. Cihazın tepkisi, uygulanan uyarının miktarına bağlı olarak değişmekte ve bu ilişki logaritmik bir modelle ifade edilmektedir. Söz konusu model $g(x) = \log_2(3x - 6)$ şeklinde tanımlı logaritmik fonksiyonu ile gösterilmektedir. Burada x, uygulanan uyarının şiddetini (volt), g fonksiyonu ise cihazın kaydettiği tepki seviyesini göstermektedir. Mühendis, cihazın ancak belirli bir uyarı seviyesinden sonra fiziksel olarak tepki verdiğini belirtmektedir.

Buna göre cihazın tepki vereceği uyarı şiddetinin aralığını bulunuz.

---

15. Örnek

f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x$ şeklinde tanımlanan logaritmik referans fonksiyona yapılan dönüşümler sonucunda elde edilen $g(x) = 2 \cdot f(x)$, $h(x) = f(x) + 3$ ve $r(x) = 2 \cdot f(x) + 3$ fonksiyonları için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. g, h ve r fonksiyonlarının cebirsel temsillerini yazınız.

2. r fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

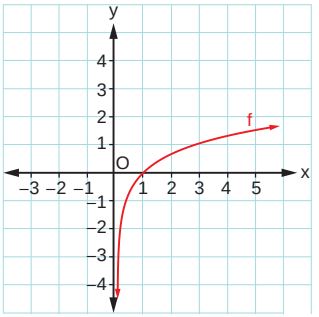
Çözüm

1. $g(x) = 2 \cdot f(x)$ olduğu için $g(x) = 2\log_3 x$ elde edilir.

   $h(x) = f(x) + 3$ olduğu için $h(x) = \log_3 x + 3$ elde edilir.

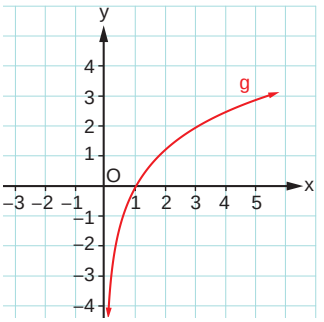
   $r(x) = 2 \cdot f(x) + 3$ olduğu için $r(x) = 2\log_3 x + 3$ elde edilir.

2. r fonksiyonunun grafiği çizilirken f fonksiyonunun görüntü kümesindeki elemanların önce Grafik 2'deki gibi 2 katı alınır sonra elde edilen grafik y ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ötelenerek Grafik 3'teki r fonksiyonunun grafiği elde edilir.



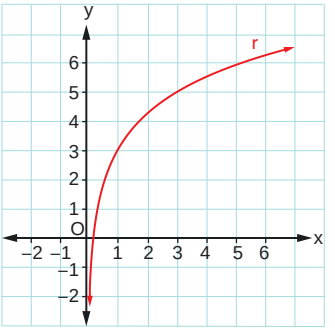
Grafik 1

$f(x) = \log_3 x$



Grafik 2

$g(x) = 2\log_3 x$



Grafik 3

$r(x) = 2\log_3 x + 3$

16. Örnek

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_5 x$ şeklinde tanımlanan logaritmik referans fonksiyona yapılan dönüşümler sonucunda elde edilen $g(x) = f(2x)$ ve $h(x) = f(2x - 1)$ fonksiyonları için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

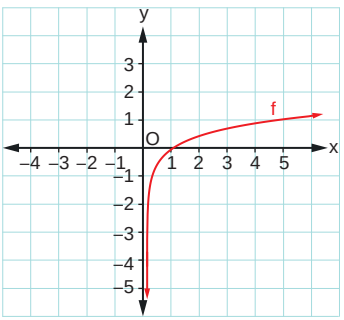
1. g ve h fonksiyonlarının cebirsel temsillerini yazınız.
2. h fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

1. $g(x) = f(2x)$ olduğu için $g(x) = \log_5 2x$ elde edilir.

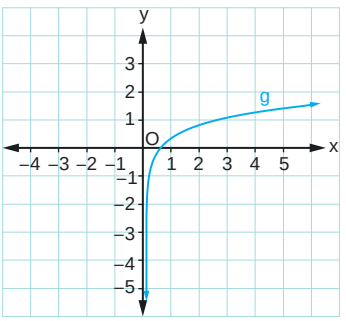
   $h(x) = f(2x - 1)$ olduğu için $h(x) = \log_5 (2x - 1)$ elde edilir.

2. h fonksiyonunun grafiği çizilirken önce f fonksiyonunun grafiği Grafik 2'deki gibi 2 kat yatay sıkıştırılır, sonra elde edilen grafik x ekseni boyunca $\frac{1}{2}$ birim pozitif yönde ötelenerek Grafik 3'teki h fonksiyonunun grafiği elde edilir.



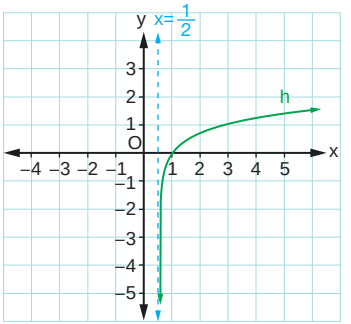
Grafik 1

$f(x) = \log_5 x$



Grafik 2

$g(x) = \log_5 2x$



Grafik 3

$h(x) = \log_5 (2x - 1)$

Sıra Sizde 9

f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$ şeklinde tanımlı logaritmik referans fonksiyondan türetilen $g(x) = 3 \cdot \log_2 x + 1$ ve $h(x) = \log_2(3x - 6)$ fonksiyonlarının grafiklerini aşağıda boş bırakılan alanlara çiziniz.

g fonksiyonunun grafiği

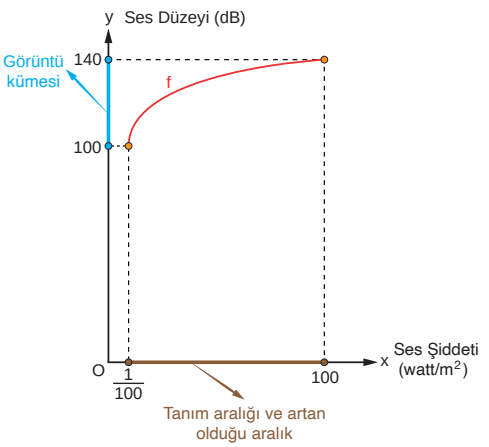
h fonksiyonunun grafiği

17. Örnek

Bir kaynaktan çıkan ses şiddeti watt/m^2 ile ölçülür. Ses şiddeti kullanılarak ses düzeyi bulunur. Ses düzeyi desibel (dB) ile ölçülür. Bir konser salonundaki hoparlörün ses şiddeti x watt/m^2 olmak üzere, ses düzeyi $f: \left[\frac{1}{100}, 100\right] \to \mathbb{R}, f(x) = 10 \cdot \log\left(\frac{x}{10^{-12}}\right)$ şeklinde f fonksiyonu ile tanımlanmaktadır. Buna göre f logaritmik fonksiyonunun nitel özelliklerini bulunuz.

Çözüm

Verilen tanım aralığı dikkate alınarak çizilmiş $f(x) = 10 \cdot \log\left(\frac{x}{10^{-12}}\right)$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Grafik incelendiğinde tanım kümesinin $\left[\frac{1}{100}, 100\right]$, görüntü kümesinin $[100, 140]$ olduğu görülür. Tanım aralığındaki her x değerine karşılık gelen f değerleri de farklı olduğundan f bire birdir. Değer aralığındaki her f değeri tanım aralığındaki en az bir x değerine karşılık gelmediğinden örten değildir.

$f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değeri olmadığından f fonksiyonunun sıfırı yoktur. Grafik incelendiğinde f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta daima pozitif değerler aldığı görülür.

$\forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{100}, 100\right]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu $\left[\frac{1}{100}, 100\right]$ nda artandır.

f fonksiyonunun verilen aralıkta maksimum değeri 140, maksimum değeri veren nokta $x = 100$'dür. Minimum değeri 100, minimum değeri veren nokta $x = \frac{1}{100}$'dür. f logaritmik fonksiyonu tek ya da çift fonksiyon değildir.

Sıra Sizde 10

Aşağıda logaritmik referans fonksiyonlara yapılan dönüşümler sonucunda elde edilen f ve g fonksiyonları verilmiştir.

$$f(x) = \log_3(4x - 1) \text{ ve } g(x) = \log_5(-x + 6)$$

f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi A, g fonksiyonunun en geniş tanım kümesi B olduğuna göre $A \cap B$ kümesini bulunuz.

Performans Görevi

Adı: Üstel ve Logaritmik Fonksiyonların Nitel Özellikleri

Beklenen Performans: Üstel ve logaritmik fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili uygulamalar yapma.

Görev: Bu görevde verilen içerikten seçeceğiniz kimya, fizik ve biyoloji alanlarına ilişkin karekodda verilen gerçek yaşam problemlerinden birini seçerek üstel ve logaritmik referans fonksiyonların nitel özellikleriyle ilgili uygulamalar yapmanız istenmektedir.

Yönerge:

Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Yapılacak işleri ve çalışma takviminizi içeren bir çalışma planı oluşturunuz.
- Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz.
- Çalışmanızı öğretmeninizin belirlediği sürede tamamlayınız.

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Verilen karekodu okutarak içerikte verilen fizik, kimya, ve biyoloji alanlarına ilişkin gerçek yaşam problemlerini inceleyiniz.
- Bu alanlardan birini seçerek seçtiğiniz alanda verilen üstel ve logaritmik fonksiyonlarla ilgili nitel özellik sorularını çözünüz.
- Çalışmanızda soruları cevaplarken işlem hatası yapmamaya, yazım kurallarına, ifadelerinizin açık ve anlaşılır olmasına dikkat ediniz.

Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Tamamladığınız çalışmayı öğretmeninize teslim ediniz.

Değerlendirme: Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı ile değerlendirilecektir.

Performans görevinin içeriğine ve Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirisiniz.

Kontrol Noktası

1. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x (a > 0 \text{ ve } a \neq 1)$ şeklinde tanımlı logaritmik referans fonksiyondan türetilen $g(x) = k \cdot \log_a(mx + r) + s$ fonksiyonunun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. adım: $f(x) = \log_a x$ referans fonksiyonun grafiği x ekseninin negatif yönünde r birim $(r > 0)$ ötelenerek $b(x) = \log_a(x + r)$ fonksiyonunun grafiği çizilir.

2. adım: $b(x) = \log_a(x + r)$ fonksiyonunun grafiği

- $|m| > 1$ olduğunda yatay sıkıştırılarak,
- $|m| < 1$ olduğunda x yatay gerilerek $c(x) = \log_a(mx + r)$ fonksiyonunun grafiği çizilir.

3. adım: $c(x) = \log_a(mx + r)$ fonksiyonunun değerini k katına eşleyen $d(x) = k \cdot \log_a(mx + r)$ fonksiyonun grafiği çizilir.

4. adım: $d(x) = k \cdot \log_a(mx + r)$ fonksiyonu y ekseni boyunca pozitif yönde s birim ötelenerek $g(x) = k \cdot \log_a(mx + r) + s$ fonksiyonunun grafiği çizilir.

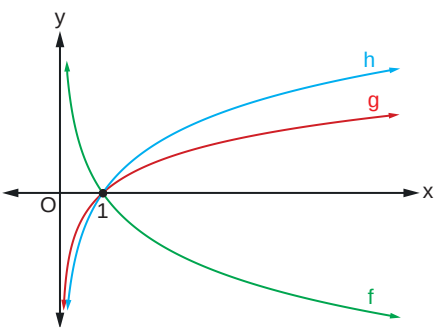
2. k, m, r ve $s \in \mathbb{R} (m \neq 0, k \neq 0)$ olmak üzere gerçek sayılarda $g(x) = k \cdot \log_a(mx + r) + s$ şeklinde tanımlı logaritmik fonksiyonunun nitel özelliklerine ait aşağıdaki sonuçlara varılır.

- Tanım kümesi $m > 0$ için $\left(-\frac{r}{m}, \infty\right)$, $m < 0$ için $\left(-\infty, -\frac{r}{m}\right)$ olur.
- g fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir.
- g fonksiyonu bire birdir.
- $a > 1$ ve $m > 0$ ya da $0 < a < 1$ ve $m < 0$ ise g artan fonksiyon olur.
- $a > 1$ ve $m < 0$ ya da $0 < a < 1$ ve $m > 0$ ise g azalan fonksiyon olur.

Ek soruların yer aldığı 3. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Logaritmik Fonksiyonlar, Nitel Özellikleri ve İşlem Özellikleri)

Alıştırmalar

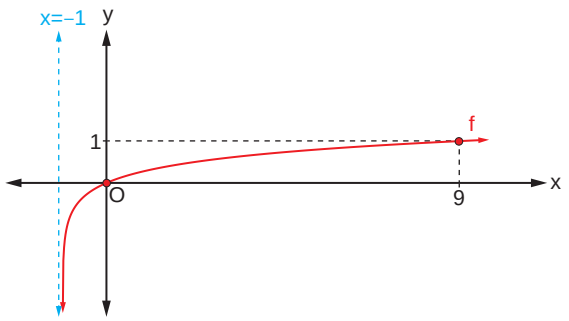
1.



Pozitif gerçek sayılarda tanımlı cebirsel temsilleri $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_b x$ ve $h(x) = \log_c x$ olan logaritmik fonksiyonların grafikleri yanda verilmiştir.

Buna göre a, b ve c sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

2.

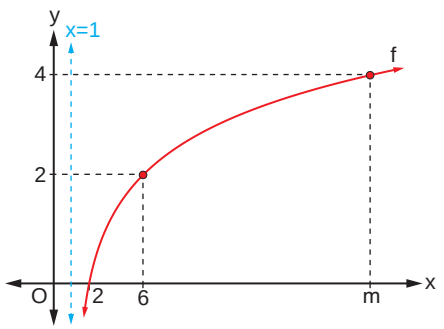


Yanda verilen $f(x) = \log_a(bx + c)$ şeklinde tanımlı logaritmik fonksiyonun grafiğine göre $a + b - c$ değerini hesaplayınız.

3. $\log_5 2 = m, \log_5 3 = n$ **olduğuna göre** $\log_5 288$**'in m ve n cinsinden eşitini bulunuz.**

4. $\log_6 9 \cdot \log_9 12 \cdot \log_{12} 15 \cdot \ldots \cdot \log_n (n+3) = 2\,(n = 3k, k \in \mathbb{Z})$ **ise n değerini hesaplayınız.**

5.



Yanda $f(x) = 2 \cdot \log_5(x - 1)$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiği verilmiştir.

Buna göre

I. **f fonksiyonunun tanım kümesi $(1, \infty)$ dır.**

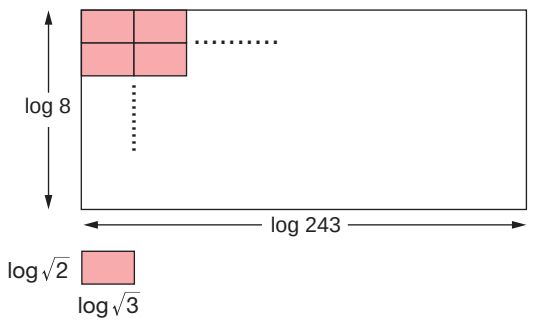
II. **f, azalan fonksiyondur.**

III. **m nin alacağı değer 26'dır.**

IV. $f\left(\frac{6}{5}\right) + f^{-1}(2) = 4$**'tür.**

ifadelerinden hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

6.



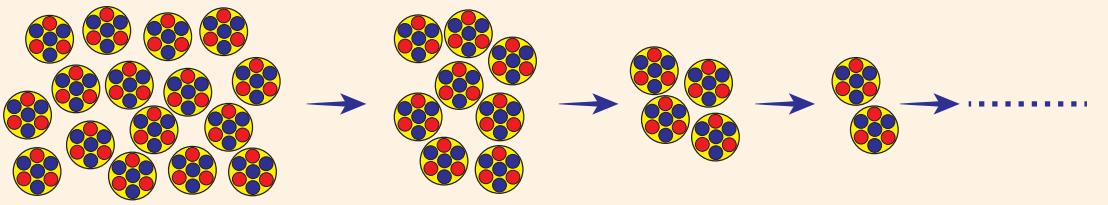
Kenar uzunlukları log 8 metre ve log 243 metre olan dikdörtgen şeklindeki bir karton, kenar uzunlukları $\log\sqrt{2}$ metre ve $\log\sqrt{3}$ metre olan küçük dikdörtgen şeklindeki etiketlerle kaplanacaktır.

Buna göre bu iş için kaç adet etiket kullanılması gerektiğini bulunuz.

4.4. ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARLA İFADE EDİLEBİLEN DENLEM VE EŞİTSİZLİKLER İÇEREN PROBLEMLER

Konuya Başlarken

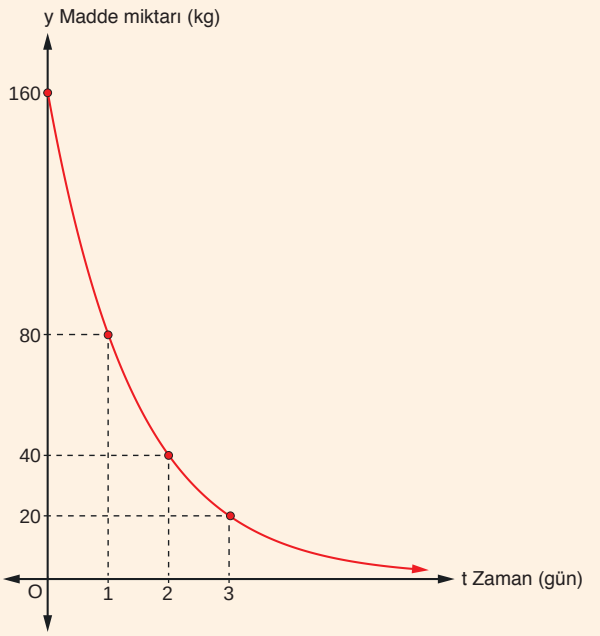
Radyoaktif bir maddenin yarılanma süresi, başlangıçta mevcut olan maddenin yarısının bozunması için gereken süredir. Yarılanma süresi 1 gün olan Şekil 4.1'deki radyoaktif maddenin başlangıçtaki miktarı 160 kg'dır.



Şekil 4.1: *Radyoaktif maddenin yarılanma süreci*

Bu radyoaktif madde uygun bir laboratuvar ortamında gözleniyor. Radyoaktif maddenin zamana bağlı olarak kalan miktarını veren fonksiyon $A(t) = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ şeklinde modelleniyor.

A üstel fonksiyonu Grafik 4.4'te verilmiştir.



Grafik 4.4: *A üstel fonksiyonunun grafiği*

Buna göre

1. **Grafikten yararlanılarak kalan radyoaktif madde miktarının 60 kg olduğu zamanın nasıl bulunabileceğine ilişkin fikirlerinizi yazınız ve sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.**

2. **Kalan radyoaktif madde miktarının 15 kg olması için geçmesi gereken zamanın cebirsel temsiller yardımıyla nasıl bulunabileceğine ilişkin fikirlerinizi yazınız ve sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.**

8. Uygulama

Üstel ve Logaritmik Referans Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonlarla Oluşturulan Denklem ve Eşitsizlikler

Aşağıda üstel ve logaritmik fonksiyonları içeren gerçek yaşam durumlarına ait sorular bulunmaktadır. Öğretmeniniz rehberliğinde 4-6 kişilik gruplar oluşturunuz. Aşağıdaki problem durumunu inceleyiniz ve soruları cevaplayınız.

T.C. Millî Eğitim Bakanlığı, çevrim içi öğrenmeyi desteklemek amacıyla aşağıdaki iki platformu sunmaktadır:

- EBA Akademik Destek: Lise öğrencilerine yönelik konu anlatımları, soru çözümleri ve deneme sınavlarına erişimi sağlar.
- MEBİ (Millî Eğitim Bakanlığı Bireysel Öğrenme Platformu): Öğrencilerin bireysel öğrenme ihtiyaçlarına uygun içerikler sunar.

Bir matematik öğretmeni, öğrencilerine EBA Akademik Destek ve MEBİ'ye dikkat çekmek amacıyla tahtaya aşağıdaki bilgilendirme metnini yazar.

> 2022-2024 yılları arasındaki ölçümlere göre EBA Akademik Destek kullanıcı sayısı 900 bindir ve her ay %8 oranında üstel olarak artmaktadır. MEBİ kullanıcı sayısı 1 milyon 200 bindir ve her ay %5 oranında üstel olarak artmaktadır.
>
> Bu iki platformda toplam 2 milyon kullanıcı sayısına ulaşılması hedeflenmiştir. EBA Akademik Destek platformunda hedefte eksik kullanıcı sayısının geçen süreye bağlı değişimi f fonksiyonuyla, MEBİ platformunda hedefte eksik kullanıcı sayısının geçen süreye bağlı değişimi g fonksiyonuyla modellenmektedir.

Öğretmenin tahtaya yazdığı metne göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. EBA Akademik Destek ve MEBİ platformunda hedefte eksik kullanıcı sayısının geçen süreye bağlı değişimini sırasıyla ifade eden f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bulunuz.

2. f ve g fonksiyonlarının sıfırlarını bulunuz. Sıfırların problem bağlamındaki anlamını ifade ediniz.

3. EBA Akademik Destek ve MEBİ platformunda hedefte eksik kullanıcı sayısının hangi sürede daha az veya aynı olduğunu gösteren $f = g$, $f < g$, $f > g$ denklem ve eşitsizliklerinin cebirsel ve grafik temsillerini ifade ediniz. Grafik temsillerini ifade ederken matematik yazılımlarından yararlanınız.

4. Elektronik tablo uygulamasını kullanarak aşağıdaki adımları gerçekleştiriniz.

1. adım: **B1** hücresine Geçen Süre (x), **C1** hücresine Eba, **D1** hücresine Mebi, **E1** hücresine Kullanıcı sayısı hedefine en yakın uygulama yazınız.

2. adım: **C2** hücresine önce = sonrasında f fonksiyonunun cebirsel temsilini x yerine **B2** olacak şekilde yazınız.

3. adım: **D2** hücresine önce = sonrasında g fonksiyonunun cebirsel temsilini x yerine **B2** olacak şekilde yazınız.

4. adım: **E2** hücresine = Eğer(C2 < D2;"Mebi";"Eba") yazınız.

5. adım: EBA Akademik Destek ve MEBİ platformunda hedefte eksik kullanıcının daha az veya aynı olduğunu bulmak için **B2** hücresine gerçek sayı değerleri yazınız.

Aşağıda elektronik tablo uygulamasında yapılan benzer bir işlemin ekran görüntüsü verilmiştir.

	A	B	C	D	E
1		**Geçen Süre**	**Eba**	**Mebi**	**Kullanıcı sayısı fazla olan uygulama**
2		3,5	1178218	1423455	Mebi
3					
4					

5. Elde ettiğiniz ve yorumladığınız farklı temsillerden yararlanarak problemin çözümü için bir strateji oluşturunuz.

6. Çözüm stratejinizi kullanarak problemi çözünüz.

7. Matematik yazılımı yardımıyla problemin çözümünde elde ettiğiniz denklem ve eşitsizliklere ait grafikleri aşağıdaki adımları gerçekleştirerek çiziniz.

1. adım: **Giriş** bölümüne f fonksiyonunun cebirsel temsilini yazıp grafiğini çiziniz.

2. adım: **Giriş** bölümüne g fonksiyonunun cebirsel temsilini yazıp grafiğini çiziniz.

Grafiklerden yararlanarak problemin çözümünü doğrulayınız.

8. Problemin çözümünde kullanılabilecek olası çözüm stratejilerini belirleyiniz. Problemin çözümünde kullandığınız stratejilerini karşılaştırarak hangi stratejinin daha kullanışlı olduğunu açıklayınız.

9. Oluşturulan stratejilerin iki fonksiyonun birbiri ile ilişkisini içeren başka problemlerin çözümünde nasıl kullanılabileceği ile ilgili çıkarımlar yapınız. Elde ettiğiniz çıkarımları matematiksel modele dönüştürerek aşağıdaki gerçek yaşam durumu probleminde uygulayınız.

Genlik, bir dalganın en yüksek (ya da en alçak) noktası ile sıfır noktası arasındaki mesafedir ve dalgayı ortaya çıkaran enerjinin miktarına bağlıdır. Dalganın enerjisi artarken genlik de artar. Deprem dalgalarının genliği artarsa depremin büyüklüğü de artar. Depremin büyüklüğü, depremin merkez üssünden belli uzaklıktaki sismograf tarafından kaydedilen dalgaların maksimum genliğinden yararlanılarak hesaplanır. Mikron cinsinden ölçülen maksimum genlik d (mikron) ve depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğü R olmak üzere R: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $R = \log d$ ile hesaplanır.

Verilen bilgileri kullanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Maksimum genliği 10 cm olarak ölçülen bir depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğünü hesaplayınız. $(1\,\text{mm} = 10^3 \text{ mikron})$

b) Maksimum genliği 20 mm olarak ölçülen bir depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğünü hesaplayınız. $(\log 2 \approx 0{,}301)$

c)

Deprem Büyüklüğü	**$0 < R \leq 2$**	**$2 < R \leq 4$**	**$4 < R \leq 6$**	**$6 < R \leq 8$**
Hasar Türü	Hasar yok	Hafif hasar	Orta hasar	Ağır hasar

Depremin büyüklüğü ve yapılarda meydana getirdiği hasar dereceleri yukarıdaki tabloda verilmiştir. A ilinde meydana gelen depremin maksimum genliği 2,5 cm, B ilinde meydana gelen depremin maksimum genliği 0,1 mm ve C ilinde meydana gelen depremin maksimum genliği 105 cm olduğuna göre bu illerdeki yapılarda meydana gelebilecek hasarları bulunuz.

ç) Bir bölgede gerçekleşen, maksimum genliği x mm ($x \in \mathbb{R}^+$) olan bir deprem sonucunda bölgede bulunan yapılarda orta ve ağır hasar meydana gelmiştir. Bu nedenle bölgedeki yapılar kentsel dönüşüme girecektir.

Verilenlere göre kentsel dönüşüme giren bir binayı etkileyen depremin genliğinin alabileceği mikron değerlerinin aralığını bulunuz.

d) Depremin olası etkilerinin en aza indirilmesi ve deprem sonrası sürdürülebilir yaşam için alınacak tedbirlerde matematiğin rolü üzerine grup arkadaşlarınızla tartışınız.

11. Çıkarımlarınızın geçerliliğini sözel, cebirsel veya grafiksel olarak değerlendiriniz.

18. Örnek

Bilgi: Bir yayınevinde kitap satış miktarını geçen süreyi ifade eden t ye (ay) bağlı olarak modelleyen fonksiyonlar, $p(t) = \log_2 t$ şeklinde tanımlı logaritmik referans fonksiyonundan türetilen $h(t) = k \cdot p(t) + r (k, r \in \mathbb{R})$ fonksiyonları şeklinde modellenmektedir.

Bir yayınevi, aynı kitabı iki farklı pazarlama stratejisiyle satışa sunarak bu stratejilerin satış miktarına olan katkılarını incelemek istemektedir. Burada f fonksiyonu ile modellenebilen ilk stratejide 1. ayda 400 adet, 8. ayda 1000 adet satış gerçekleşmektedir. g fonksiyonu ile modellenebilen diğer stratejide 1. ayda 700 adet, 4. ayda 900 adet satış gerçekleşmektedir.

Verilen bilgilere göre

1. f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsilini bulunuz.
2. Her iki stratejide de eşit miktarda kitap satışının yapıldığı zamanı gösteren ifadenin cebirsel ve grafik temsilini yaparak eşit miktarda satışın gerçekleştiği ayı bulunuz.
3. f fonksiyonu ile modellenen satış stratejisindeki kitap satış miktarının g fonksiyonu ile modellenen satış stratejisindeki kitap satış miktarından fazla olmasına karşılık gelen eşitsizliğin cebirsel temsilini bularak eşitsizliği çözünüz.

Çözüm

1. Bir yayınevinin belirlediği stratejiler kitapların satış miktarını etkilediğinden

$f(t) = a \cdot \log_2 t + b, (a, b \in \mathbb{R})$ olur.

$t = 1$ için $f(1) = 400 \Rightarrow 400 = a \cdot \log_2 1 + b \Rightarrow 0 + b = 400 \Rightarrow b = 400$ olur.

$t = 8$ için $f(8) = 1000 \Rightarrow 1000 = a \cdot \log_2 8 + 400 \Rightarrow 3a + 400 = 1000 \Rightarrow a = 200$ olur. Buradan f fonksiyonu $f(t) = 200 \cdot \log_2 t + 400$ bulunur.

$g(t) = c \cdot \log_2 t + d, (c, d \in \mathbb{R})$ olur.

$t = 1$ için $g(1) = 700 \Rightarrow 700 = c \cdot \log_2 1 + d \Rightarrow 0 + d = 700 \Rightarrow d = 700$ olur.

$t = 4$ için $f(4) = 900 \Rightarrow 900 = c \cdot \log_2 4 + 700 \Rightarrow 2c + 700 = 900 \Rightarrow c = 100$ olur. Buradan g fonksiyonu $g(t) = 100 \cdot \log_2 t + 700$ bulunur.

2. Her iki strateji kullanılarak aynı sürede eşit miktarda kitap satışı yapılabilmesi için $f(t) = g(t)$ olmalıdır. Buna göre $200 \cdot \log_2 t + 400 = 100 \cdot \log_2 t + 700 \Rightarrow 100 \cdot \log_2 t = 300 \Rightarrow \log_2 t = 3 \Rightarrow t = 8$ bulunur. Bu durumda her iki strateji kullanılarak eşit miktarda kitap satışı 8. ayda yapılır.

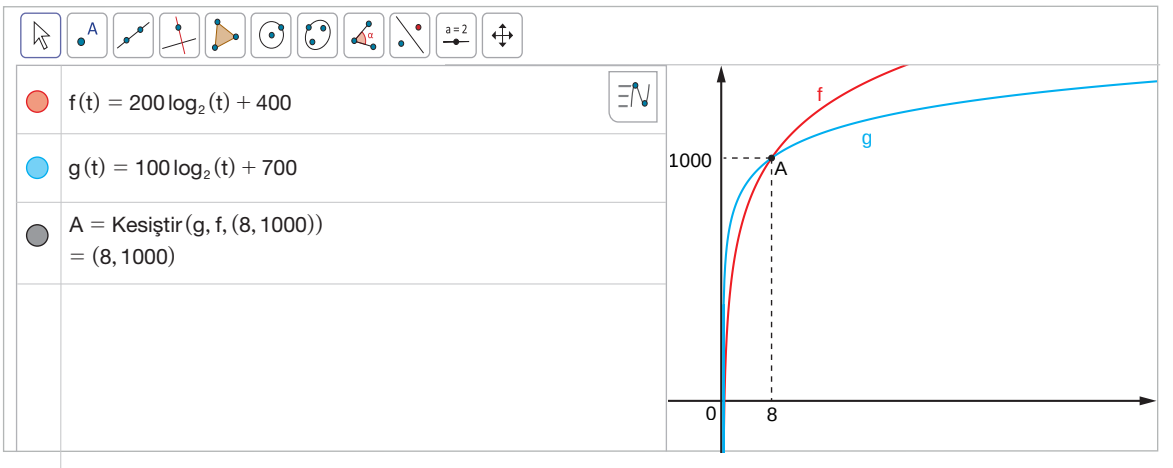
Bu problem durumunun çözümünün grafik temsili ile yapılabilmesi için matematik yazılımında aşağıdaki adımlar gerçekleştirilir.

1. adım: Giriş bölümüne $f(t) = 200 \cdot \log_2 t + 400$ yazılarak f fonksiyonunun grafiği çizilir.

2. adım: Giriş bölümüne $g(t) = 100 \cdot \log_2 t + 700$ yazılarak g fonksiyonunun grafiği çizilir.

3. adım: Araçlar sekmesinden **Kesiştir** aracı seçilip f ve g fonksiyonlarının üstüne tıklandığında fonksiyonların kesiştiği nokta bulunur.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



f ve g fonksiyon grafiklerinin kesişim noktasının apsis değerinin problem bağlamındaki anlamı, her iki strateji kullanılarak eşit miktarda kitap satışının 8. ayda gerçekleşmesidir.

3. f fonksiyonu ile modellenen satış stratejisinden elde edilen kitap satış miktarının g fonksiyonu ile modellenen satış stratejisinden elde edilenden fazla olması cebirsel $f(t) > g(t)$ ile gösterilir. Buradan

$200 \cdot \log_2 t + 400 > 100 \cdot \log_2 t + 700$

$100 \cdot \log_2 t > 300$

$\log_2 t > 3$

$t > 2^3 \Rightarrow t > 8$ olur.

$f(t) > g(t)$ eşitsizliğini sağlayan t değerleri $(8, \infty)$ aralığındadır.

19. Örnek

Salgın dönemlerinde bulaşıcı hastalıkların zaman içerisinde yayılma miktarlarını anlamak için matematiksel araçlardan yararlanılarak epidemik modeller kullanılır. Bu modeller arasında en bilinenler SIR (Susceptible, Infectious, Recovered) ve SEIR (Susceptible,Exposed, Infectious, Recovered) modelidir.

SIR modeli, popülasyonu üç gruba ayırarak; SEIR modeli, popülasyonu dört gruba ayırarak salgının yayılma hızı ile ilgili bilgi verir. Bu gruplar şunlardır:

I. Susceptible (Sıseptıbıl) (S): Hastalık taşımaya duyarlı bireyler

II. Infectious (Infekşıs) (I): Hastalığın bulaştığı ve taşıyıcı olan bireyler

III. Recovered (Rikavırd): İyileşmiş ve artık hasta olamayan bireyler

IV. Exposed (Ekspozd) (E): Taşıyıcı ama hastalığı bulaştırmayan bireyler

Her iki modelde de hasta sayısı başlangıçta üstel olarak artar. Belli bir süre sonra hastalık epidemik pik (zirve) seviyesine ulaşır. Başka bir ifadeyle hasta sayısı en yüksek değerine ulaşır. Başlangıçtan hastalığın pik seviyesine ulaştığı zamana kadar geçen süreye "pik süresi" denir. Alınan koruma önlemleri pik süresini (gün) ve pik seviyesini etkiler. Salgın, pik seviyesine ulaştıktan sonra hasta sayısı zamanla azalmaya başlar.



Bir şehirde gözlenen salgında hasta sayısının başlangıçta üstel büyüme gösterdiği, hastalığın pike ulaşmasından sonra ise hasta sayısının logaritmik azalış gösterdiği saptanmıştır.

$P(0)$: başlangıçta hasta olan kişi sayısı

r: enfeksiyon oranı

t_0: salgının pik süresi olmak üzere

t. gün sonunda hasta sayısı $P(t) = \begin{cases} P(0) \cdot e^{rt} & , t < t_0 \\ 150 - 20 \cdot \ln t & , t \geq t_0 \end{cases}$ şeklinde modellenmiştir.

Başlangıçta hasta sayısının 40 olduğu ve enfeksiyon oranının $\frac{1}{80}$ olduğu bir salgında salgının pik süresinin 30 günden daha az olamayacağı öngörülmüştür. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. 20. gün sonunda hasta olan kişi sayısını yaklaşık olarak bulunuz.

2. Salgında pik süresini grafik temsillerinden yararlanarak bulunuz.

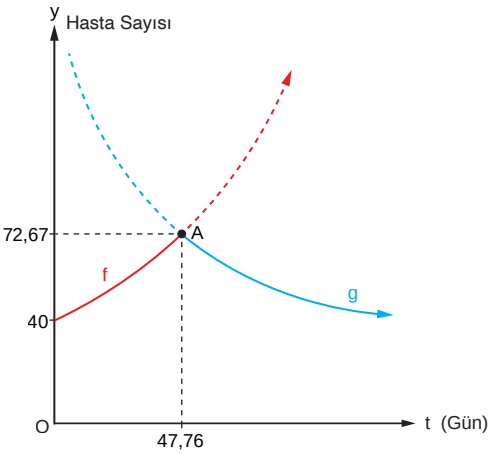
3. Yukarıdaki sorularda kullandığınız stratejileri verimlilik ve kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

Çözüm

1. Hastalığın pik süresi t_0 bir aydan daha az olmadığından $t = 20$ için hasta olan kişi sayısı $P(t) = P(0) \cdot e^{rt}$ fonksiyonu ile bulunur. Enfeksiyon oranı $r = \frac{1}{80}$ ve başlangıçtaki hasta sayısı $P(0) = 40$ olduğundan $P(20) = 40 \cdot e^{20 \cdot \frac{1}{80}} = 40 \cdot e^{\frac{1}{4}}$ bulunur. $e^{\frac{1}{4}} \approx 1,284$ için $P(20) \approx 40 \cdot 1,284 = 51,361$ bulunur. Buna göre 20. günde hasta sayısı yaklaşık 51 kişi olur.

2. Hasta sayısındaki artış $f(t) = 40 \cdot e^{\frac{t}{80}}$ üstel fonksiyonuyla modellenirken hasta sayısının pik yapmasından sonraki azalışı $g(t) = 150 - 20 \cdot \ln t$ logaritmik fonksiyonuyla modellenir. Yanda hasta sayısını gösteren f ve g fonksiyonlarının grafik temsilleri verilmiştir.

Fonksiyonların kesişme noktasında hastalık pik seviyesine ulaşır. Yandaki grafik incelendiğinde f ve g fonksiyonlarının $t = 47,76$ noktasında kesiştiği görülür. Buna göre hastalığın pik seviyesine ulaşması yaklaşık 48 gün sürer.



3. 1. soruda yer alan matematiksel model için çözüm stratejisi olarak cebirsel yöntem kullanılmıştır. Bunun yanı sıra grafik temsillerinden yararlanılarak da aynı sonuca varılacaktır. 2. soruda yer alan matematiksel model için çözüme ulaştıran denklemin karmaşık yapısından dolayı cebirsel yöntem kullanılamayacağından çözüm stratejisi olarak grafik temsilinden yararlanılmıştır.

Sıra Sizde 11

İnsan cildinin sağlıklı olabilmesi için gereken hidrojen iyon derişimi (mol/L) 10^{-4} ile 10^{-6}, aralığındadır. Bu hidrojen iyon derişim değerlerinden uzaklaşıldıkça temas edilen süre de dikkate alınarak temas eden maddelerin cilde zararı artar.

$[H^+]$ hidrojen iyon derişimi olmak üzere bir çözeltinin pH değeri $pH = -\log[H^+]$ şeklinde modellenir. Aşağıdaki görselde temizlik yapılırken kullanılan bazı maddelerin pH değerleri verilmiştir.



Buna göre

1. Görseldeki temizlik maddelerinden çamaşır suyunun içerdiği hidrojen-iyon derişimini (mol/L) bulunuz.

2. Görselden yararlanarak uzun süre temas edilmesi durumunda cilde zarar verebilecek temizlik ürünlerini yazınız.

20. Örnek

Aşağıdaki soruları tanımlı olduğu aralıklarda üstel ve logaritmik referans fonksiyonlarının çözüm stratejilerinden yararlanarak cevaplayınız.

1. $5^{x+1} - 3 = 17$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+14} > \left(\frac{1}{27}\right)^{7-2x}$

3. $\log[5 \cdot \log(x+3)] - 1 = 0$

4. $\log_3 x - 4 \leq 0$

Çözüm

1. $5^{x+1} - 3 = 17$ ise $5 \cdot 5^x = 20$ bulunur. buradan $5^x = 4$ elde edilir. Tabanları farklı olan üstel denklemlerde ifadenin tersi alınarak $x = \log_5 4$ bulunur. $Ç = \{\log_5 4\}$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+14} > \left(\frac{1}{27}\right)^{7-2x}$ ise $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+14} > \left(\frac{1}{3}\right)^{21-6x}$ olur. Buradan $x + 14 < 21 - 6x$ ise $7x < 7$ olur, $x < 1$ elde edilir. Buna göre eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = (-\infty, 1)$ olarak bulunur.

3. $\log[5 \cdot \log(x+3)] - 1 = 0$ ise $\log[5 \cdot \log(x+3)] = 1$ olur. Buradan logaritma tabanı 10 olduğu için $5 \cdot \log(x+3) = 10$ denklemi elde edilir. $\log(x+3) = \frac{10}{5} = 2$ den $\log(x+3) = 2$ olur. Buradan $x + 3 = 10^2$ den $x = 97$ olarak bulunur. $Ç = \{97\}$ olur.

4. $\log_3 x - 4 \leq 0$ ise $\log_3 x \leq 4$ logaritma tabanı 3 olduğu için $x \leq 3^4$ ve $x \leq 81$ olarak bulunur. Logaritma fonksiyonunun tanımından dolayı $x > 0$ olacağı için $Ç = (0, 81]$ olur.

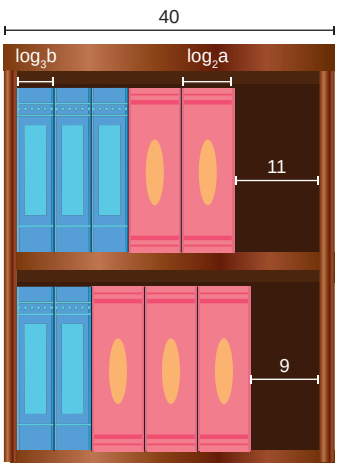
Sıra Sizde 12

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Bir ülkenin nüfusu A milyon iken t yıl sonraki nüfusu $N(t) = A \cdot e^{0,02t}$ $(t \in \mathbb{Z}^+)$ milyon olarak modellenmiştir.

Başlangıçta 20 milyon olan ülke nüfusu, en az kaç yıl sonra 54 milyonu geçer?
$(e \approx 2,7)$

2.



Eni $\log_2 a$ cm olan özdeş pembe kitaplar ve eni $\log_3 b$ cm olan özdeş mavi kitaplar, 40 cm enindeki raflara görseldeki gibi yerleştirilmiştir.

Üst rafa 3 mavi ve 2 pembe kitap yerleştirildiğinde rafta 11 cm boşluk kalmaktadır. Alt rafa 2 mavi ve 3 pembe kitap yerleştirildiğinde rafta 9 cm boşluk kalmaktadır.

Buna göre a ve b değerlerini bulunuz.

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

21. Örnek

Aşağıdaki logaritmik fonksiyon içeren eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

1. $2 < \log_2(x+1) < 3$
2. $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \geq -4$

Çözüm

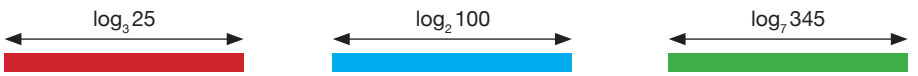
1. $2 < \log_2(x+1) < 3$ eşitsizliğinde logaritma tabanı 2 olduğu için $2^2 < x+1 < 2^3$ eşitsizliği elde edilir. $4 < x+1 < 8$ ve $3 < x < 7$ olarak bulunur. Ayrıca $x+1 > 0$ olduğu için $x > -1$ olmalıdır. $Ç = (3, 7)$ olarak bulunur.
2. $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \geq -4 \Rightarrow x+3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \Rightarrow x+3 \leq 2^4 \Rightarrow x \leq 13$ olarak bulunur, ayrıca $x+3 > 0$ için $x > -3$ olmalıdır. Buradan $Ç = (-3, 13]$ olarak bulunur.

Sıra Sizde 13

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. x ve y birer tam sayı olmak üzere $\log_5 400 < x < \log_3 250 < y < \log_2 1000$ eşitsizliği veriliyor.

   Buna göre x + y ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük değerin toplamını bulunuz.

2. 

   Uzunlukları sırasıyla $\log_3 25$ birim, $\log_2 100$ birim, $\log_7 345$ birim olan kırmızı, mavi ve yeşil bordürler yan yana olacak biçimde bir duvara döşenecektir.

   En kısa bordürden en uzun bordüre doğru sırasıyla kaplanacağına göre dizilecek bordürlerin renk sıralamasını bulunuz.

3. n kenarlı bir çokgenin içine yazılan a pozitif gerçek sayısının gösterimi, "a sayısının n tabanında logaritması" şeklinde tanımlanmaktadır.

   Örneğin x = $\log_5 x$, y = $\log_3 y$ şeklinde olmaktadır.

   Buna göre $\frac{x}{36} \geq \frac{3}{2}$ **eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

Performans Görevi

Adı: Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlara Yönelik Denklem ve Eşitsizliklerin Kullanıldığı Gerçek Yaşam Problemlerinde Matematiksel Modelleme Yapma

Beklenen Performans: Üstel ve logaritmik denklem ve eşitsizliklerin kullanıldığı gerçek yaşam problemlerinin çözümünde matematiksel modelleme yaparak sunum yapma ve rapor hazırlama

Görev: Üstel ve logaritmik denklem ve eşitsizliklerin kullanıldığı gerçek yaşam problemlerinden birini seçerek bu problemlerin çözümünde matematiksel modelleme yapmanız ve çalışmalarınızı rapor hâline getirerek sunum yapmanız istenmektedir.

Yönerge:

Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Yapılacak işleri ve çalışma takviminizi içeren bir çalışma planı oluşturunuz.
- Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz.
- Çalışmanızı öğretmeninizin belirlediği sürede tamamlayınız.

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Karekodda verilen gerçek yaşam problemlerinden birini seçiniz (örneğin: kimyasal tepkime hızı, ses desibeli, radyasyon azalması, bakteri artışı vb.)
- Problemi inceleyerek durumu ifade eden uygun üstel veya logaritmik denklem ya da eşitsizliği oluşturunuz.
- Oluşturduğunuz modeli çözünüz ve sonucu problem bağlamında yorumlayınız.
- Çözüm sürecinizi (model kurma, çözme, yorumlama aşamalarıyla birlikte) rapor hâline getiriniz.

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Raporunuzu özenle hazırlayarak öğretmeninize zamanında ve eksiksiz teslim ediniz.
- Raporunuzu sınıf arkadaşlarınıza sununuz.

Değerlendirme: Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı ile değerlendirilecektir.

Performans görevinin içeriğine ve Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirisiniz.

Ek soruların yer aldığı 4. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Üstel ve Logaritmik Denklem İçeren Problemlerin Çözümü)

Kontrol Noktası

$a > 0, a \neq 1$, f, g ve h uygun koşullarda tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

Üstel Denklemler

- $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ise $f(x) = g(x)$
- $a^{f(x)} = g(x)$ ise $f(x) = \log_a g(x)$ $(g(x) > 0)$

Üstel Eşitsizlikler

- $0 < a < 1$ için $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ise $f(x) > g(x)$
- $a > 1$ için $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ise $f(x) < g(x)$

Logaritmik Denklemler

- $\log_a f(x) = g(x)$ ise $f(x) = a^{g(x)}$ $(f(x) > 0)$
- $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ise $f(x) = g(x)$ $(f(x) > 0, g(x) > 0)$
- $\log_{h(x)} f(x) = g(x)$ ise $f(x) = h(x)^{g(x)}$ $(f(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1)$
- $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ ise $f(x) = g(x)$ $(f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1)$

Logaritmik Eşitsizlikler

- $a > 1$ için $\log_a f(x) < g(x)$ ise $f(x) < a^{g(x)}$ $(f(x) > 0)$
- $a > 1$ için $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ ise $f(x) < g(x)$ $(f(x) > 0, g(x) > 0)$
- $0 < a < 1$ için $\log_a f(x) < g(x)$ ise $f(x) > a^{g(x)}$ $(f(x) > 0)$
- $0 < a < 1$ için $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ ise $f(x) > g(x)$ $(f(x) > 0, g(x) > 0)$

Alıştırmalar

1. **$\log_3(x + 3) \leq 2$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamını bulunuz.**

2. Başlangıçta boş olan kumbarasına her gün bir miktar para atan Derin, ilk gün kumbarasına 3 TL atmıştır. Daha sonra her gün kumbarada biriken para miktarı bir önceki günün 3 katına çıkmaktadır.

Buna göre kumbaradaki paranın kaçıncı günde 729 TL olacağını bulunuz.

3. Aşağıdaki tabloda bir yerleşim yerinin yıllara göre nüfusları verilmiştir.

Yıl	2016	2017	2018	2019	2020
Nüfus	10 000	11 000	12 100	13 310	14 641

Buna göre zamana bağlı nüfus artışını gösteren üstel fonksiyonu tanımlayarak hangi yıldan itibaren nüfusun 17 000'den fazla olacağını bulunuz.

4. Bir şirket, her yıl sonunda ürünlerinin maliyetini bir önceki yıla göre %10 oranında azaltmayı hedefliyor. İlk yıl bir ürünün üretim maliyeti 1000 TL olarak hesaplanmıştır.

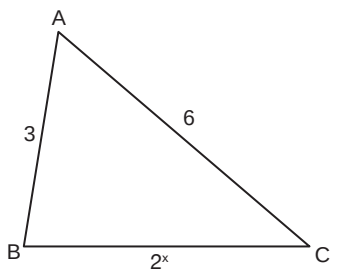
Buna göre şirketin bu ürünün maliyetini en az kaç yıl sonra 729 TL'nin altına düşürebileceğini bulunuz.

5. **Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.**

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-1} < \left(\frac{9}{4}\right)^{x+3}$

b) $\log_3(\log_2(x-1)) < 1$

6.



Yandaki şekilde verilen ABC üçgeninde $|AC| = 6$ birim, $|AB| = 3$ birim ve $|BC| = 2^x$ birimdir.

Buna göre x in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

7. $3^{\log_x 8} \cdot 2^{\log_x 3} = 9$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

8. $f(x) = \log_4(x^2 + 12x + m)$ logaritma fonksiyonu her x gerçek sayısı için tanımlıdır.

Buna göre m nin alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

9. $f(x) = \log_7(-4x^2 + 4x + 15)$ **fonksiyonunun tanımlı olduğu aralığı bulunuz.**

4. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

Aşağıda temaya ait farklı türlerde 17 adet soru yer almaktadır.

1-13. bilgi ve becerileri ölçen soruları cevaplayınız.

1. Astronomi alanında yapılan araştırmalarda gökte parlayan bir yıldızın görünen parlaklığı ile gerçek parlaklığı arasındaki ilişki logaritmik fonksiyon kullanılarak gösterilir. Bir yıldızın parlaklık birimi lümen ve

A: yıldızın gerçek parlaklığının ölçüsü (lümen)

B: yıldızın görünen parlaklığının ölçüsü (lümen) olmak üzere

$B = 3 \log A - 2$ bağıntısı vardır.

Buna göre

a) Gerçek parlaklığı 1000 lümen olan yıldızın görünen parlaklığının kaç lümen olduğunu bulunuz.

b) Gerçek parlaklığı 810 lümen olan yıldızın görünen parlaklığının yaklaşık kaç lümen olduğunu bulunuz. $(\log 3 \approx 0,47)$

c) Görünen parlaklığı 2,5 lümen olan yıldızın gerçek parlaklığının kaç lümen olduğunu bulunuz.

2. Bir radyoaktif maddenin yarılanma süresi karakteristik bir sabittir. Yarılanma süresi, maddedeki bozunma sonucunda maddenin yarı yarıya azalması için geçen süredir.

A (t): t zamanında maddenin kalan miktarı (kg)

A_0: maddenin başlangıçtaki miktarı (kg)

t: geçen süre (yıl)

h: yarılanma süresi (yıl) olmak üzere zamana bağlı kalan madde miktarını (kg) veren eşitlik $A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$ şeklindedir.

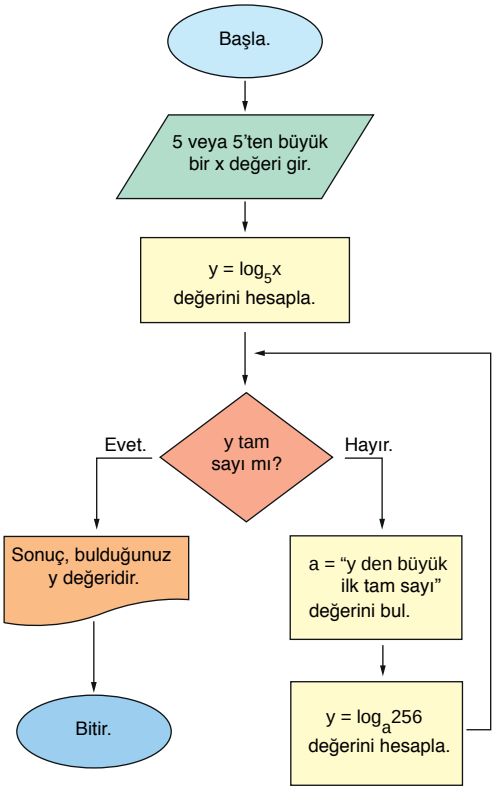
Buna göre

a) Yarılanma süresi 6 yıl olan bir maddeden başlangıçta 32 kg vardır. 24 yıl sonraki kalan madde miktarının kaç kg olacağını hesaplayınız.

b) Yarılanma süresi 5 yıl olan bir maddeden başlangıçta 40 kg vardır. Yaklaşık kaç yıl sonra kalan madde miktarının 30 kg olacağını hesaplayınız. $(\log_2 3 \approx 1,58)$

c) Bir radyoaktif maddeden başlangıçta 200 kg vardır. 16 yıl sonraki kalan madde miktarı 50 kg olduğuna göre bu maddenin yarılanma süresinin kaç yıl olacağını hesaplayınız.

3. Aşağıda bir algoritmanın akış şeması verilmiştir.



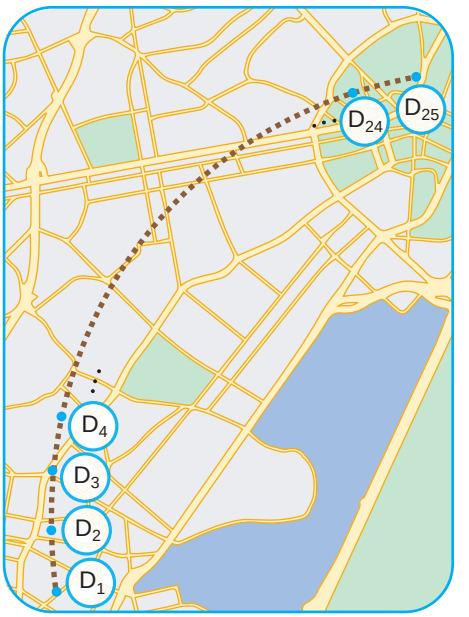
Buna göre

a) $x = 10$ **değeri için çıkan sonucu bulunuz.**

b) $x = 29$ **değeri için çıkan sonucu bulunuz.**

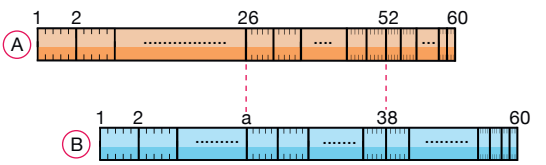
c) **Çıkan sonucun 4 olabilmesi için x yerine yazılabilecek en küçük tam sayı değerini bulunuz.**

4. Bir metro hattında aşağıdaki görselde verildiği gibi $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_{25}$ durakları yer almaktadır. $\forall m \in [1, 24]$ ndaki sayma sayısı için D_m ve D_{m+1} durakları arasındaki mesafe $9 \cdot \log_5 \frac{m+1}{m}$ km olmaktadır.



Buna göre D_1 ve D_{25} durakları arasındaki mesafenin kaç km olduğunu bulunuz.

5. Üzerinde 1'den 60'a kadar tam sayıların yazılı olduğu bir cetvel türünde her x pozitif tam sayısının 1'e olan uzaklığı $\log x$ birimdir.



Bu özellikteki özdeş A ve B cetvelleri şekildeki gibi alt alta getirildiğinde A cetvelindeki 52 sayısı B cetvelindeki 38 sayısına, A cetvelindeki 26 sayısı ise B cetvelindeki a sayısına denk gelmektedir.

Buna göre a değerini bulunuz.

6. Newton (Nivtın)'ın soğuma yasasına göre sıcaklığı yüksek olan maddeler daha düşük sıcaklıktaki bir ortama bırakıldığında zamanla soğur.

t: geçen süre (dakika)

$T(t)$: maddenin t anındaki sıcaklığı (°C)

$T_ç$: ortamın sabit sıcaklığı (°C)

T_0: maddenin $t = 0$ anındaki sıcaklığı (°C)

k: soğuma sabiti

olmak üzere Newton'ın soğuma yasası $T(t) = T_ç + (T_0 - T_ç)e^{-k \cdot t}$ denklemi ile modellenmektedir.

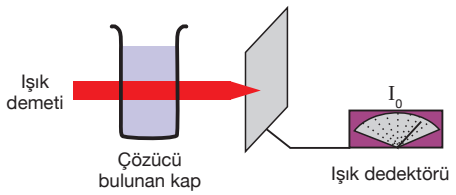
Buna göre

a) Sıcaklığı 78 °C olan bir yemek, 50 dk. boyunca 24 °C olan oda sıcaklığında bekletildiğinde süre sonunda yemeğin yaklaşık kaç °C olacağını bulunuz.
$(k = 0,02, e \approx 2,7)$

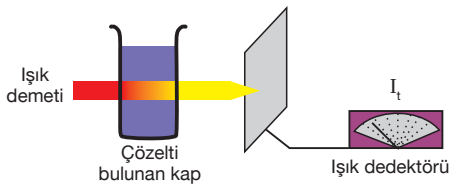
b) Sıcaklığı 96,9 °C olan bir çaydanlığın 24 °C olan oda sıcaklığında yaklaşık kaç dakika bekletildiğinde sıcaklığının 34 °C'a düşeceğini bulunuz.
$(k = 0,02, e \approx 2,7)$

7. Spektrofotometre (sıpektırofotometre), katı veya sıvı numunelerin yoğunluklarını ışık geçirgenliği yardımıyla hesaplayan bir cihazdır. Aşağıda sıvı numunelerde spektrofotometrenin çalışma prensibi verilmiştir.

Şekilde gösterildiği gibi içinde çözücü bulunan bir kap, ışık yoluna yerleştirilir ve ışığın kaptan geçtikten sonraki yoğunluğu ölçülür (I_0).



Daha sonra numuneli çözelti bulunan kap, ışık yoluna yerleştirilir ve ışığın kaptan geçtikten sonraki yoğunluğu ölçülür (I_t).



Maddenin yoğunluğu $C = -2500 \ln\left(\frac{I_t}{I_0}\right)$ (Mol/L) formülü kullanılarak bulunur.

Buna göre

a) I_t değeri I_0 değerinin %25'i olan sıvı numunenin yoğunluğunun yaklaşık kaç Mol/L olduğunu bulunuz.
$(\ln 2 \approx 0,69)$

b) Yoğunluğu 4025 Mol/L olan bir sıvı numunede I_t değerinin, I_0 değerinin yaklaşık yüzde kaçına eşit olduğunu bulunuz. $(\ln 5 \approx 1,61)$

8. x ve y pozitif gerçek sayılar ve $x \neq 1$ için

$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ sembolünün değeri "x tabanında logaritma y" değerine eşittir.

Örneğin $\begin{vmatrix} 2 \\ 8 \end{vmatrix} = \log_2 8 = 3$ bulunur.

$\begin{vmatrix} a \\ 2 \end{vmatrix} = \frac{2}{5}$ $\quad \begin{vmatrix} b \\ a \end{vmatrix} = \frac{5}{3}$ $\quad \begin{vmatrix} c \\ b \end{vmatrix} = 9$

eşitlikleri sağlanmaktadır.

Buna göre c gerçek sayısının değerini bulunuz.

9. Bir şehirde grip salgını gözlemlenmiştir.

Hastalığın t gün sonra yayıldığı kişi sayısı $P(t) = \frac{650}{1 + 24 \cdot 2^{-0,2t}}$ ile modelleniyor.

Buna göre

a) Başlangıçta kaç kişinin grip olduğunu bulunuz.

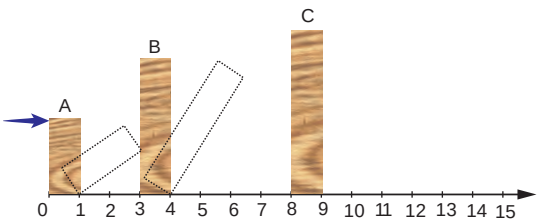
b) Grip salgınının 5. gününde hastalığın yayıldığı kişi sayısını bulunuz.

c) Grip salgınında hastalığın yayıldığı kişi sayısının 130 kişi olması için yaklaşık kaç gün geçmesi gerektiğini bulunuz. $(\log_2 6 \approx 2,58)$

10. Aşağıdaki görselde önden görünümleri dikdörtgen şeklinde olan 1 cm genişliğindeki A, B ve C tahta blokları verilmiştir. Blokların uzunlukları sırasıyla $\log_5 35$, $\log_3 x$ ve $\log_2 40$ cm'dir.

A bloğu ok yönünde itilerek yere değen sağ köşesi üzerinde dönerek devriliyor.

A bloğu, B bloğunun devrilmesine; B bloğu, C bloğunun devrilmesine neden oluyor.



Buna göre

a) x in alabileceği en küçük tam sayı değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

b) C bloğu devrildiğinde bloğun sağ kenarının üst köşesinin hangi iki tam sayının arasına denk geleceğini bulunuz.

11. Bir yayınevi bastığı belli türdeki kitapların zamana bağlı toplam satış sayılarını incelemiştir. x bir kitabın basılmasından sonra geçen zaman (ay) olmak üzere a tane kitapçıda satışa sunulan bir kitabın toplam satış sayısı $f(x) = 300 \cdot a \cdot \log_2(x+1)$ olarak modellenmiştir.

Yayınevi bastırdığı "Geçmişten Geleceğe Matematik (G)" kitabını 10 kitapçıda, 3 ay sonra bastırdığı "Matematiğin İzinde (H)" kitabını 20 kitapçıda satışa sunmuştur. G kitabının basımından itibaren geçen süreyi esas alarak G kitabının zamana bağlı toplam satış sayısı fonksiyonu g, H kitabının zamana bağlı toplam satış sayısı h fonksiyonu ile modellenmiştir.

Buna göre

a) g ve h fonksiyonlarının cebirsel temsillerini yazınız.

b) g ve h fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

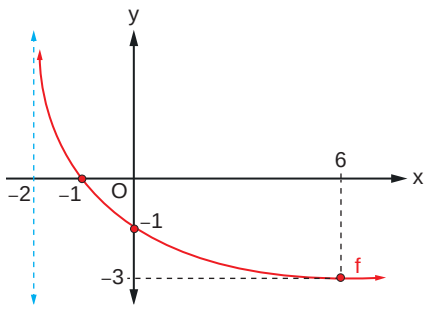
c) g fonksiyonunun grafiğine uygulanacak hangi dönüşümler sonucunda h fonksiyonunun grafiğinin elde edileceğini bulunuz.

12. Bir matematik öğretmeni, öğrencilerinin logaritmik fonksiyonların tanım aralığına ait bilgilerini ölçmek amacıyla aşağıdaki kurgusal durumu içeren bir problem oluşturmuştur.

> Bir sistemin performansını modellemek amacıyla her gerçek sayı değeri için tanımlı ve cebirsel temsili $f(x) = \log_2(x^2 + 2px + 36)$ olan f fonksiyonu oluşturulmuştur.
> Buna göre p nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

Öğretmenin oluşturduğu problemin doğru cevabını bulunuz.

13. Bir mühendislik firması, kullandıkları bir sistemin tepki hızının gösterildiği grafiği incelerken aşağıdaki eğriyi elde etmiştir.

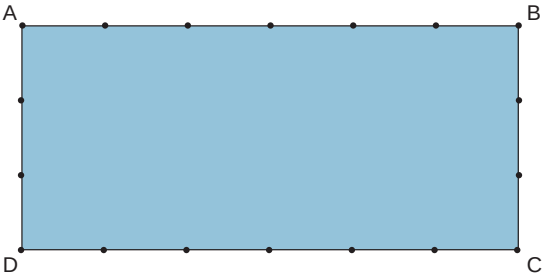


Firma, sistemin tepki hızının gösterildiği grafiği matematiksel bir modelle ifade etmek istemektedir. Mühendisler, yaptıkları analiz sonucunda modeli $f(x) = \log_a(bx + c)$ şeklindeki f logaritmik fonksiyonuna ait cebirsel temsili kullanarak oluşturmuştur.

Buna göre f fonksiyonun cebirsel temsilini bulunuz.

14-17. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

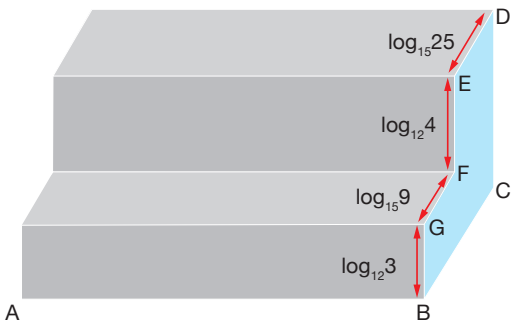
14. Aşağıdaki ABCD dikdörtgeninde AB ve DC kenarları 6 eş parçaya ayrılmış ve her bir parçanın uzunluğu $\log_6 9$ birim olmuştur. AD ve BC kenarı ise 3 eşit parçaya ayrılmış ve her bir parçanın uzunluğu $\log_6 16$ birim olmuştur.



Buna göre ABCD dikdörtgeninin çevre uzunluğunun birim cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 24 E) 30

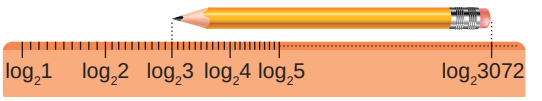
15. Aşağıdaki görselde basamak yüzeyleri birbirine dik olan seyyar bir merdiven verilmiştir. $|BG| = \log_{12} 3$ birim, $|GF| = \log_{15} 9$ birim, $|FE| = \log_{12} 4$ birim, $|ED| = \log_{15} 25$ birim ve $3 \cdot (|ED| + |GF|) = |AB|$ dir.



Buna göre merdivenin gri yüzeylerinin alanının birimkare cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

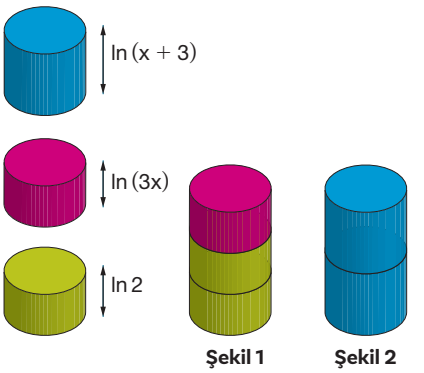
16. Üzerinde santimetre cinsinden logaritmik değerlerin yazılı olduğu şekildeki cetvelde kalemin bir ucunun $\log_2 3$, diğer ucunun $\log_2 3072$ hizasında olduğu görülmektedir.



Buna göre kalemin boyu kaç cm'dir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

17. Aşağıdaki görsellerde yükseklikleri sırasıyla $\ln(x+3)$ birim, $\ln(3x)$ birim ve $\ln 2$ birim olan mavi, pembe ve yeşil bloklar verilmiştir.



Şekil 1'deki 2 tane yeşil ve 1 tane pembe blok ile Şekil 2'deki 2 mavi bloğun birleştirilmesiyle oluşturulmuş kulelerin yükseklikleri eşittir.

x uzunluğunun kaç birim olduğunu gösteren gerçek sayı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 3,6 D) 4 E) 5

Tema ile ilgili daha fazla soruya yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

5. TEMA

NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER (3)

5.1. **Fonksiyonların Bileşkesi**

5.2. **Fonksiyonlarda Dört İşlem**

Anahtar Kavramlar

- artanlık-azalanlık
- bileşke fonksiyon
- bire birlik
- fonksiyonun işareti
- fonksiyonun sıfırı
- maksimum-minimum değer
- maksimum-minimum nokta
- örtenlik
- teklik-çiftlik
- ters fonksiyon

Sembol ve Gösterimler

- $(f \circ g)(x)$
- $f(g(x))$
- $(f+g)(x)$
- $(f-g)(x)$
- $(f \cdot g)(x)$
- $(f / g)(x)$

Bu temada sizden

- fonksiyonların bileşkelerine ilişkin muhakemeler yapabilmeniz,
- fonksiyonlarda dört işlem özelliklerini yorumlayabilmeniz

beklenmektedir.

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, araştırma ödevi ve performans görevlerini yerine getirmeniz, ölçme ve değerlendirme sorularını cevaplamanız istenmektedir.



5. Tema karekodu

5. Tema Sunusu'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Başlarken

Bileşke fonksiyonlar, gerçek yaşamın içinde mühendislikten biyolojiye, ekonomiden sanayiye kadar geniş bir kullanım alanına sahiptir. Bu kavram, birden fazla fonksiyonun kullanıldığı durumlarda bir fonksiyonun görüntü kümesindeki elemanın diğer fonksiyonun tanım kümesinde kullanılması esasına dayanır. Bu sayede bileşke fonksiyonlar, karmaşık sistemleri daha sade ve anlaşılır duruma getirir. Örneğin bir aracın zamana bağlı olarak gittiği mesafeyi gösteren fonksiyon ile aracın katettiği mesafeye göre harcadığı yakıt miktarını gösteren fonksiyonunun art arda işlemler yapılarak incelenmesinde bileşke fonksiyon kullanılır. Fonksiyonlarda dört işlem ise analiz için gerekli fonksiyonların oluşumunda kullanılır.

Ön Değerlendirme

1. Uygun tanım ve değer kümesine sahip f, g, h ve r fonksiyonlarının cebirsel temsilleri aşağıda verilmiştir.

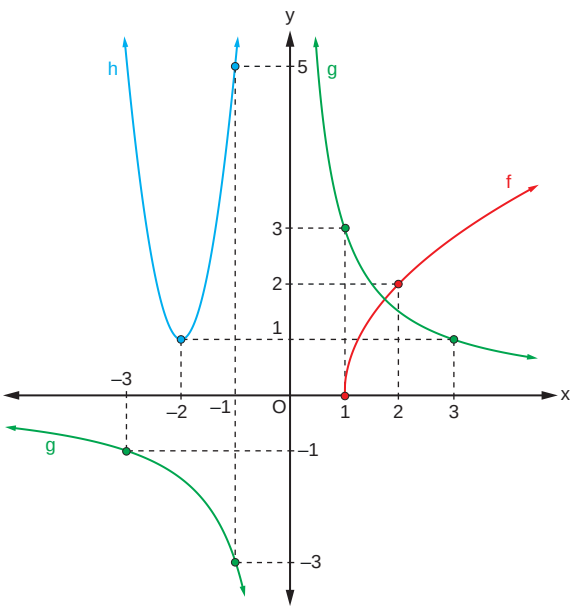
$f(x) = 2x - 4$ $\quad g(x) = \frac{1}{x-3} + 1$ $\quad h(x) = x^2 + 2$ $\quad r(x) = 5\sqrt{x-2}$

f, g, h ve r fonksiyonlarından sadece biri için doğru olan nitel özellikler A, B ve C şeklinde gruplandırılmıştır.

A	B	C
• Artan fonksiyondur. • Maksimum ve minimum noktası yoktur. • Fonksiyonun sıfırı 2'dir.	• Fonksiyonun işareti her noktada pozitiftir. • Tanım kümesi R dır. • Bire bir olmayan çift fonksiyondur.	• Fonksiyonun sıfırı 2'dir. • Azalan fonksiyondur. • Maksimum ve minimum noktası yoktur.

Buna göre f, g, h ve r fonksiyonlarını uygun nitel özellikler ile eşleştirerek boşta kalan fonksiyonu belirtiniz.

2.



Yukarıda dik koordinat sisteminde grafikleri verilen f karekök, h karesel ve g rasyonel fonksiyonlarının tanım ve değer kümeleri ile cebirsel temsillerini bulunuz.

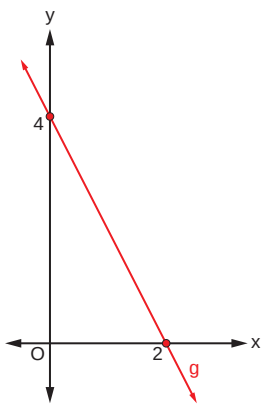
3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel referans fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ötelenmesi ile g fonksiyonunun grafiği ve g fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca negatif yönde 1 birim ötelenmesi ile h fonksiyonunun grafiği elde edilmiştir.

Buna göre g ve h fonksiyonlarının cebirsel ifadelerini yazınız ve grafiklerini çiziniz.

4. Aşağıdaki tabloda verilen fonksiyonların nitel özelliklerini bularak ilgili boşlukları doldurunuz.

Nitel Özellikler		$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 4 - 2x$	$g: [9, 24) \to [6, 9)$ $g(x) = \sqrt{3x + 9}$	$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h(x) = x^2 + 25$	$k: [0, \infty) \to \left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$ $k(x) = \frac{-18}{x+4} + 3$
Tanım Kümesi					
Görüntü Kümesi					
Bire Bir Olma Durumu					
Örten Olma Durumu					
Maksimum Noktası ve Değeri					
Minimum Noktası ve Değeri					
Teklik-Çiftlik					
Artanlık-Azalanlık					
Sıfırları					
İşareti	(+)				
	(−)				

5.



Yanda f doğrusal referans fonksiyonuna yapılan dönüşümler ile elde edilen g fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

a) g fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

b) $g(3) + g^{-1}(5)$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

6. Bir fidanlıktaki fidanlar, 60 günde satışa hazır hâle gelmektedir. Fidanların günlere bağlı boy uzunluğu (cm) $f(x) = 30 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{60} + \frac{3\pi}{2}\right) + 70$ şeklinde modellenmiştir.

Buna göre

a) Fidanların boy uzunluğunun 20. günde kaç cm olacağını bulunuz.

b) Fidanların boy uzunluklarının hangi aralıklarda değiştiğini bulunuz.

7. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = 3^x$ şeklinde tanımlı üstel referans fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun grafiğinin x ekseninde pozitif yönde 2 birim ötelenmesiyle g fonksiyonu, f fonksiyonunun grafiğinin y ekseninde negatif yönde 2 birim ötelenmesiyle h fonksiyonu elde ediliyor

Buna göre

a) g ve h fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bulunuz.

b) g^{-1} ve h^{-1} fonksiyonlarının tanım kümeleri sırasıyla A ve B olmak üzere $A \cap B$ yi bulunuz.

5.1. FONKSİYONLARIN BİLEŞKESİ

Konuya Başlarken

1. a) Daha önce öğrendiğiniz bilgileri temel alarak fonksiyonlar ve onların nitel özellikleriyle ilgili anahtar kavramları ve bunlar arasındaki ilişkileri görselleştirdiğiniz bir kavram haritası oluşturunuz.

b) Oluşturduğunuz kavram haritasını kullanarak ön bilgilerinizi değerlendiriniz ve hangi konularda eksikleriniz olduğunu tespit ediniz.

2. Fonksiyonlarla ilgili bilgilerinizden yola çıkarak birden çok fonksiyonel işlemi sırasıyla yapmanın hangi durumlarda gerekli olabileceği ile ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız. Fikirleriniz üzerine arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız.

3. Bir ekmek fabrikasında bulunan A makinesi ile içerisine konulan buğdayın kütlesinin yarısı kadar un üretilebilmektedir. B makinesiyle ise içerisine konulan unun her 1000 gramı için 600 gram su eklenerek hamur elde edilebilmektedir. Fabrika sahibi, A ve B makinelerinin yerine bu iki makinenin yaptığı işi tek başına yapabilen bir C makinesi satın alıyor. A makinesinin buğdaydan elde ettiği unun miktarını (g) veren fonksiyon f, B makinesinin undan elde ettiği hamurun miktarını veren (g) fonksiyon g olmak üzere

a) f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bulunuz.

b) A ve B makinelerinin çalışma prensiplerine bağlı kalan C makinesini temsil eden h fonksiyonunun cebirsel temsili f ve g fonksiyonları yardımıyla nasıl bulunabilir? Yorumlayınız.

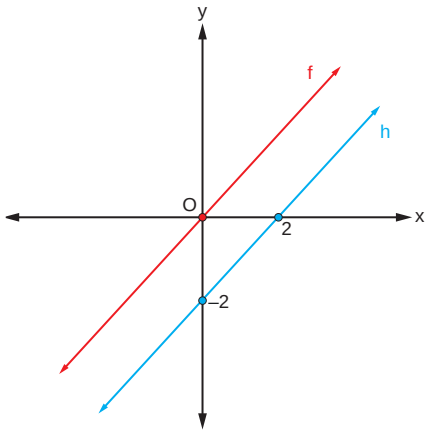
c) C makinesinin, A ve B makinelerinin yaptığı işi tek başına yapması örneğinden yararlanarak bir fonksiyonun birden çok fonksiyonun sağladığı işlemleri tek başına gerçekleştirmesine ilişkin fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. Uygulama

Fonksiyonlarda Bileşke Kavramı

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1.



Gerçek sayılarda tanımlı f doğrusal referans fonksiyonun grafiğinin y ekseni boyunca negatif yönde 2 birim ötelenmesi ile gerçek sayılarda tanımlı h fonksiyonunun grafiği elde edilmektedir.

Buna göre

a) h fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

b) h fonksiyonunun cebirsel temsilini kullanarak h fonksiyonunu f türünden ifade ediniz.

c) $y = h(f(x))$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

ç) b ve c maddelerinde elde edilen cebirsel temsilleri benzerlik ve farklılıkları yönünden karşılaştırınız ve yorumlayınız.

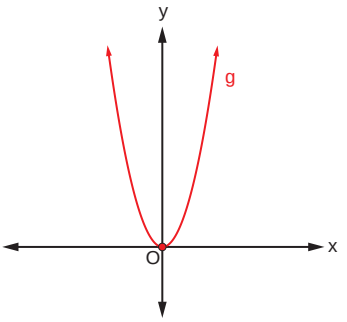
2. Gerçek sayılarda $g(x) = x^2, h(x) = x - 2$ ve $t(x) = (x - 2)^2$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar veriliyor.

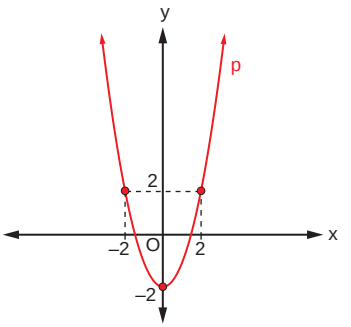
a) $k(x) = g(x - 2)$ şeklinde tanımlı fonksiyonun cebirsel temsilini bulunuz.

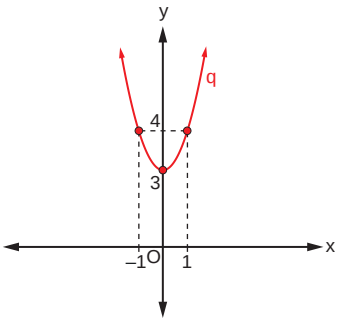
b) k fonksiyonunun cebirsel temsilini kullanarak k fonksiyonunu h türünden ifade ediniz.

c) b maddesinde elde edilen cebirsel temsil ile t fonksiyonunu benzerlik ve farklılıkları yönünden karşılaştırınız ve yorumlayınız.

3. Gerçek sayılarda $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x - 2$ ve $r(x) = x + 3$ şeklinde fonksiyonlar tanımlanmış; $g(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel referans fonksiyonuna yapılan dönüşümler ile p ve q fonksiyonları elde edilmiştir. Aşağıda g, p ve q fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.







Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) p ve q fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bulunuz.

b) p ve q fonksiyonları elde edilirken g karesel referans fonksiyonuna hangi dönüşümlerin uygulandığını bulunuz.

c) p ve q fonksiyonlarının cebirsel temsilerini g ve f fonksiyonları türünden ifade ediniz.

ç) c maddesinde elde edilen cebirsel temsilleri kullanarak p fonksiyonunu g ile h türünden, q fonksiyonunu g ile r türünden ifade ediniz.

d) Aşağıda uygun koşullarda tanımlı k_1, k_2, k_3 ve k_4 fonksiyonlarının cebirsel temsilleri verilmiştir. Buna göre k_1, k_2, k_3 ve k_4 fonksiyonlarını f, g, r ve t fonksiyonlarından en az ikisi türünden yazınız.

I. $k_1(x) = (x - 2)^2 + 3$

II. $k_2(x) = x + 1$

III. $k_3(x) = (x + 3)^2$

IV. $k_4(x) = x^2 + 1$

f ve g fonksiyonları için $g(f(x))$ olan bileşke işlemi $(g \circ f)(x)$ şeklinde gösterilir ve g bileşke f şeklinde okunur.

4. Gerçek sayılarda tanımlı ve değerli f ile g fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümelerindeki bazı değerler aşağıdaki Tablo 1 ve Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 1

x	1	2	3	4	5
f(x)	3	5	7	9	10

Tablo 2

x	3	5	7	9	11
g(x)	5	1	4	3	2

a) Tablo 1 ve Tablo 2'de verilen f ve g fonksiyonlarına ait değerleri kullanarak aşağıdaki Tablo 3 ve Tablo 4'te boş bırakılan alanları örneklerdeki gibi doldurunuz.

Tablo 3

x	f(x)	g(f(x))
1	3	5
2		
3		
4		
5		

Tablo 4

x	g(x)	f(g(x))
3		
5		
7	4	9
9		
11		

b) Tablo 3'ten yararlanarak $g \circ f$ işlemi için f fonksiyonunun görüntü kümesi ile g fonksiyonunun tanım kümesi arasındaki ilişkiyi inceleyiniz.

Tablo 4'ten yararlanarak $f \circ g$ işlemi için g fonksiyonunun görüntü kümesi ile f fonksiyonunun tanım kümesi arasındaki ilişkiyi inceleyiniz.

c) $g \circ f$ ve $f \circ g$ işlemlerinin fonksiyon olma şartını sağlayıp sağlamadığını inceleyiniz. İnceleme sonunda fikirlerinizi paylaşınız ve sınıf arkadaşlarınızla fikirleriniz üzerine tartışınız.

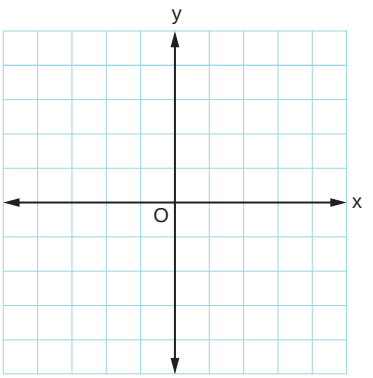
5. $h:[0,\infty) \to \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x}$ ve $r:[0,\infty) \to \mathbb{R}, r(x) = x + 1$ şeklinde tanımlı h ve r fonksiyonları verilmiştir.

a) h ve r fonksiyonlarını kullanarak $h \circ r$ ve $r \circ h$ işlemlerinin cebirsel temsillerini bulunuz.

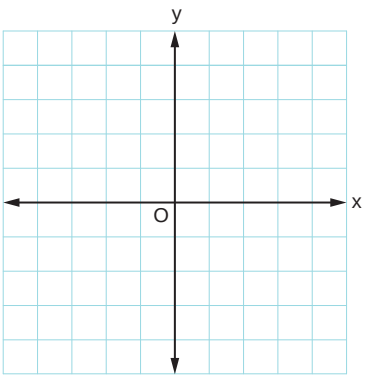
b) $h \circ r$ fonksiyonunun tanımlı olması için r fonksiyonunun görüntü kümesi ile h fonksiyonunun tanım kümesi arasında nasıl bir ilişki olduğunu bulunuz.

c) $r \circ h$ fonksiyonunun tanımlı olması için h fonksiyonunun görüntü kümesi ile r fonksiyonunun tanım kümesi arasında nasıl bir ilişki olduğunu bulunuz.

ç) Grafik 1'deki dik koordinat sistemine r fonksiyonunun grafiğini çiziniz. r fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $h \circ r$ fonksiyonunun grafiğini Grafik 2'deki dik koordinat sistemine çiziniz.



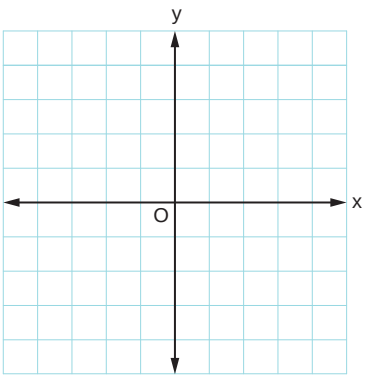
Grafik 1



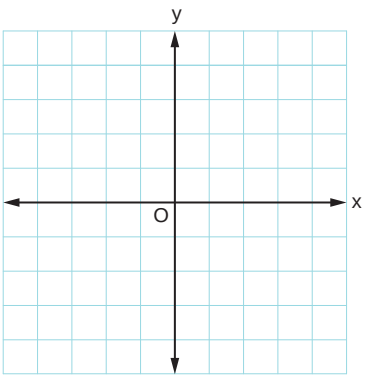
Grafik 2

d) $h \circ r$ fonksiyonunun tanım kümesi ile r fonksiyonunun tanım kümesi arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

e) Grafik 3'teki dik koordinat sistemine h fonksiyonunun grafiğini çiziniz. h fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $r \circ h$ fonksiyonunun grafiğini Grafik 4'teki dik koordinat sistemine çiziniz.



Grafik 3



Grafik 4

f) $r \circ h$ fonksiyonunun tanım kümesi ile h fonksiyonunun tanım kümesi arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

g) Matematik yazılımlarını kullanarak aşağıdaki adımları gerçekleştiriniz.

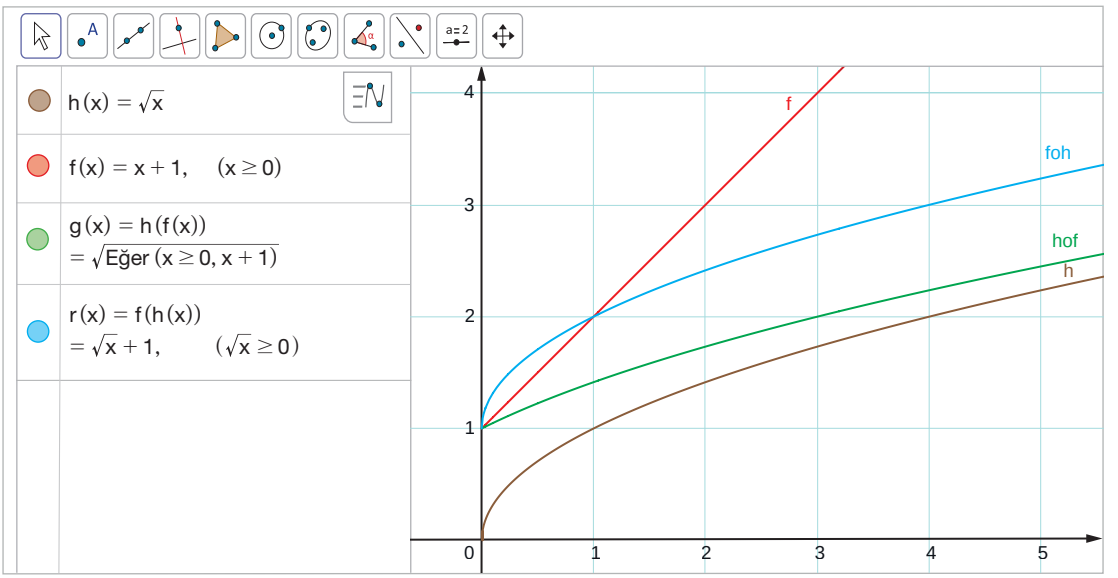
1. adım: Giriş bölümüne $h(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ yazınız.

2. adım: Giriş bölümüne $f(x) = x + 1, x \geq 0$ yazınız.

3. adım: Giriş bölümüne $g(x) = h(f(x))$ yazınız.

4. adım: Giriş bölümüne $r(x) = f(h(x))$ yazınız.

Bu adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



Elde ettiğiniz $h \circ f$ ve $f \circ h$ fonksiyonunun grafik temsillerini inceleyerek tanım ve görüntü kümelerini karşılaştırınız.

6. Gerçek sayılarda tanımlı ve değerli f ve g fonksiyonları kullanılarak elde edilen $f \circ g$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesinin asgari koşullarını tespit ediniz. Elde ettiğiniz sonuçları arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. Örnek



Semiha, basıncın sabit kaldığı ortam koşullarında sıcak hava balonunun içindeki gazın ısıtılmasıyla balonun yükseldiğini gözlemlemiştir. Bu süreçte gazın sıcaklığı zamanla arttıkça balonun şiştiğini ve hacminin büyüdüğünü fark etmiştir. Bu durumu matematiksel olarak modellemek amacıyla balonun içindeki gazın başlangıçta 280 Kelvin olan sıcaklığının zamana (dk.) bağlı değişimini veren fonksiyon $f(x) = 4x + 280$ şeklinde oluşturmuştur. Balon içindeki gazın hacminin (m^3) sıcaklığa bağlı değişimi ise $g(x) = 7x$ şeklinde tanımlanmıştır.

Buna göre

1. Balon içindeki gaz ısıtılmaya başladıktan 5 dakika sonra balonun içerisindeki gazın hacminin kaç m^3 olacağını bulunuz.
2. Balonun içerisindeki gazın ısıtılmasından kaç dakika sonra gazın hacminin 2380 m^3 olacağını yazınız.
3. Balonun içerisindeki gazın ısıtılmaya başlamasından itibaren zamana bağlı balonun hacmini modelleyen h fonksiyonunu ifade ediniz.

Çözüm

1. Önce 5. dakikada balonun içindeki gazın sıcaklığı bulunur. $f(x) = 4x + 280$ şeklinde tanımlı fonksiyonda $x = 5$ yazılırsa $f(5) = 4 \cdot 5 + 280 = 300$ Kelvin bulunur. Bu sıcaklık değeri $g(x) = 7x$ şeklinde tanımlı fonksiyonda kullanılır. Balonun hacmi $g(300) = 7 \cdot 300 = 2100$ metreküp olur.
2. Önce balonun hacminin 2380 metreküp olduğu sıcaklık değeri bulunur. $g(x) = 2380$ yazılır. $7x = 2380$ olur. Buradan $x = 340$ Kelvin bulunur. Balonun sıcaklığının 340 Kelvin olduğu zamanı bulmak için $f(x) = 340$ yapılır. $4x + 280 = 340$ olur. $4x = 60$ olur. Buradan $x = 15$ dakika bulunur.
3. h fonksiyonunu bulmak için f ile g fonksiyonlarının bileşkesi alınır.
$h(x) = g(f(x)) = 7 \cdot f(x) = 7 \cdot (4x + 280) = 28x + 1960$ olur. Bu fonksiyon zamana bağlı balonun hacmini ifade eder.

Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için f fonksiyonunun görüntü kümesinin her bir elemanını g fonksiyonunun tanım kümesinin bir elemanı olarak kullanan fonksiyona **bileşke fonksiyon** denir. Bileşke fonksiyonu $y = g(f(x))$ veya $y = (g \circ f)(x)$ şeklinde gösterilir.

2. Örnek

Gerçek sayılarda $f(x) = 2x - 5$ ve $g(x) = x^2 - 3x + 7$ şeklinde f ve g fonksiyonları tanımlanıyor.

Buna göre $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonlarının cebirsel temsillerini bularak $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonları arasındaki ilişkiyi yorumlayınız.

Çözüm

$f(x) = 2x - 5$ ve $g(x) = x^2 - 3x + 7$ için

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot g(x) - 5 = 2 \cdot (x^2 - 3x + 7) - 5 = 2x^2 - 6x + 9$ olur.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x)^2 - 3 \cdot f(x) + 7 = (2x - 5)^2 - 3(2x - 5) + 7 = 4x^2 - 26x + 47$ olur.

$f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonlarının cebirsel temsilleri incelendiğinde fonksiyonların birbirine eşit olmadığı görülür.

Sıra Sizde 1

Aşağıdaki tabloda f ve g fonksiyonlarının bazı x değerlerine karşılık gelen görüntüleri verilmiştir.

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	2	3	5	1	6	3
g(x)	3	5	6	2	1	4

Buna göre tabloda verilen değerleri kullanarak $\dfrac{f(g(2)) + g(f(3))}{f(f(1)) - g(g(4))}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

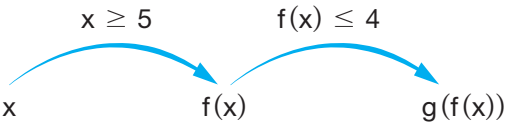
3. Örnek

$f: [5, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x - 5}$ ve $g: (-\infty, 4] \to \mathbb{R}, g(x) = 3x + 5$ şeklinde f ve g fonksiyonları tanımlanıyor. Buna göre

1. $g \circ f$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
2. $g \circ f$ fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.
3. $g \circ f$ fonksiyonunun grafiğini çizerek tanım kümesinin doğruluğunu kontrol ediniz.

Çözüm

1. $g \circ f$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için f fonksiyonunun tanım kümesinin her elemanının görüntüsü, g fonksiyonunun tanım kümesinin bir elemanı olmalıdır.



$f: [5, \infty) \to \mathbb{R}, \forall x \in [5, \infty)$ olduğundan $x \geq 5$ olur. (1)

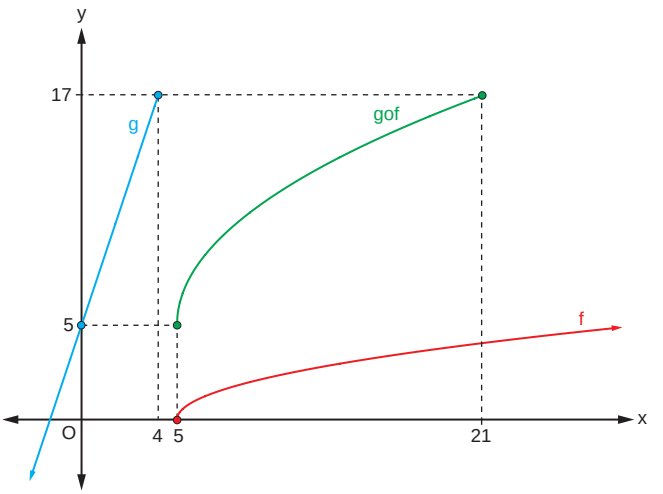
$f(x) \in (-\infty, 4] \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-5} \leq 4$ olmalıdır.

$\sqrt{x-5} \leq 4 \Rightarrow x - 5 \leq 16 \Rightarrow x \leq 21$ (2)

$g \circ f$ fonksiyonunun tanım aralığındaki x değişkeni (1) ve (2) durumlarını sağlamalıdır.
$x \geq 5$ ve $x \leq 21$ eşitsizlikleri birlikte değerlendirilir. $g \circ f$ fonksiyonu $5 \leq x \leq 21$ olması durumunda tanımlı olacaktır.

2. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3 \cdot f(x) + 5 = 3 \cdot \sqrt{x-5} + 5$ olur.

3. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde $g \circ f$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Grafik incelendiğinde $g \circ f$ fonksiyonunun tanım kümesinin $[5, 21]$ olduğu grafiksel olarak doğrulanır. Buna göre $g \circ f$ fonksiyonunun tanım kümesinin f fonksiyonunun tanım kümesinin bir alt kümesi olduğu söylenebilir.

Sıra Sizde 2

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x - 1$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + 3$ olmak üzere $(f \circ g)(k) = -5$ eşitliği sağlanmaktadır.

Buna göre k değerini bulunuz.

2. $\mathbb{R} - \{0\}$ da $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı f rasyonel referans fonksiyonu ile $\mathbb{R}$ de $g(x) = 2x + 1$ şeklinde tanımlı g doğrusal fonksiyonu veriliyor. $A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere f ve g fonksiyonları için $(f \circ g)(A) = \left[\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right]$ eşitliği sağlanmaktadır.

Buna göre A kümesini bulunuz.

4. Örnek



Görselde B noktasında bulunan bir gemi, düz bir kıyı şeridine paralel olarak saatte 20 km sabit hızla ilerlemektedir. Gemi ile sahilde A noktasında bulunan deniz feneri arasındaki en yakın mesafe 5 km olmaktadır. Gemi, sahile paralel şekilde d km yol alarak C noktasına varmaktadır. Bu durumda gemi ile deniz feneri arasındaki mesafe s km olmaktadır.

$[AB] \perp [CB]$ olduğuna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. B noktasından hareket eden geminin aldığı yola (d) bağlı olarak deniz feneri ile arasındaki mesafeyi (s) modelleyen f fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.
2. Geminin deniz fenerine en yakın olduğu andan itibaren zamana bağlı olarak geminin aldığı yolu modelleyen g fonksiyonun cebirsel temsilini bulunuz.
3. Geminin zamana bağlı olarak deniz fenerine olan mesafesini modelleyen fonksiyonun cebirsel temsilini bulunuz.

Çözüm

1. ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa $s^2 = 5^2 + d^2$ denklemi elde edilir.
   $s = \sqrt{25 + d^2} \Rightarrow s = f(d) = \sqrt{25 + d^2}$ şeklinde tanımlı fonksiyon elde edilir.
2. Gemi saatte 20 km sabit hızla gidiyorsa t saat sonra 20t km yol alır. Bu durumda $d = g(t) = 20t$ olarak ifade edilir.
3. Geminin zamana bağlı olarak deniz fenerine olan mesafesini modelleyen $f \circ g$ fonksiyonu $(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(20t) = \sqrt{25 + (20t)^2}$ şeklinde elde edilir.

Sıra Sizde 3

Petrol taşıyan bir yük gemisinde meydana gelen petrol sızıntısının hemen ardından denizde yapılan araştırmalar, sızıntının dairesel bir şekilde yayıldığını göstermiştir. Sızan petrolün metre cinsinden yarıçap uzunluğu r, sızıntının başlangıcından itibaren t (saat) cinsinden ölçülen yarıçap uzunluğunu (metre) veren fonksiyon $r(t) = 10\sqrt{t}$ dir. Petrol sızıntısının denizde kapladığı alanın yarıçap uzunluğuna bağlı fonksiyonu ise $A(r) = \pi r^2$ ile ifade edilmiştir.

Buna göre

1. **4 saat sonra denizde oluşan sızıntının yarıçap uzunluğunun kaç metre olduğunu hesaplayınız.**
2. **4 saat sonra denizde oluşan sızıntının deniz yüzeyinde kapladığı alanın kaç m^2 olduğunu hesaplayınız.**
3. **Sızan petrolün denizde oluşturduğu daire alanının zamana bağlı fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.**

Ek soruların yer aldığı 1. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Bileşke Fonksiyon)

2. Uygulama

Bileşke Fonksiyonların Nitel Özellikleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. Bir sağlıklı yaşam uygulaması, kullanıcıların günlük adım sayısı ile kalori yakımı arasındaki ilişkiyi hesaplamak amacıyla çeşitli fonksiyonlar tanımlamıştır. Uygulama; her 1000 adımda 0,5 km yüründüğünü ifade eden g fonksiyonunu ve her kilometrede ortalama 50 kalori yakıldığını ifade eden f fonksiyonunu kullanmaktadır. g fonksiyonunun cebirsel temsili Görsel 1'de, f fonksiyonunun cebirsel temsili ise Görsel 2'de verilmiştir.



Görsel 1



Görsel 2

Her 1000 adımda yakılan kalori miktarını gösteren fonksiyon h olarak tanımlanıyor. Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) h fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

b) Tablo 1'i örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Adım Sayısı (Bin) x	Toplam Mesafe (km) g(x)	Yakılan Kalori f(x)
1	0,5	25
2		
4		
6		
8		

c) a ve b maddelerinden yararlanarak f, g ve h fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.

ç) f ve g fonksiyonlarının grafiklerini inceleyerek Tablo 2'yi doldurunuz.

Tablo 2

Nitel Özellikler		f	g
Tanım Kümesi			
Görüntü Kümesi			
Bire Bir Olma Durumu			
Örten Olma Durumu			
Maksimum Noktası ve Değeri			
Minimum Noktası ve Değeri			
Teklik-Çiftlik			
Artanlık-Azalanlık			
Sıfırı			
İşareti	(+)		
	(−)		

d) f ve g fonksiyonlarının nitel özelliklerinden yararlanarak $(f \circ g)$ fonksiyonunun nitel özelliklerine dair çıkarımlarda bulununuz.

2. Uygun tanım ve değer kümesine sahip f ve g fonksiyonları ile ilgili Tablo 3'te verilen nitel özelliklere dair kabulleri inceleyerek $g \circ f$ fonksiyonu için uygun ifadeleri bulunuz ve tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3

Nitel Özellikler	f	g	g ∘ f
Bire Bir Olma Durumu	Bire bir	Bire bir	Bire bir
	Bire bir	Bire bir değil	
	Bire bir değil	Bire bir	
	Bire bir değil	Bire bir değil	
Örten Olma Durumu	Örten	Örten	Örten
	Örten	Örten değil	
	Örten değil	Örten	
	Örten değil	Örten değil	

Artanlık/Azalanlık		Artan	Artan	Artan
		Azalan	Artan	
		Artan	Azalan	
		Azalan	Azalan	
Teklik/Çiftlik		Tek	Tek	Tek
		Tek	Çift	
		Çift	Tek	
		Çift	Çift	
Sıfırları		Yok	Yok	
		Var	Yok	Yok
		Yok	Var	
		Var	Var	
Maksimum-Minimum Noktası ve Değeri	**Maksimum**	Var	Artan	Var
		Var	Azalan	
	Minimum	Var	Artan	
		Var	Azalan	

3. Uygun tanım ve değer kümesine sahip $a(x) = 2x - 6, b(x) = \frac{x+3}{2}, c(x) = \sqrt{x+1}$ ve $d(x) = x^2 - 1$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar veriliyor.

a) Tablo 4'te a, b, c ve d fonksiyonları kullanılarak oluşturulan bileşke fonksiyonlar verilmiştir. Tabloyu örneklerde gösterildiği gibi doldurarak bileşke fonksiyonların cebirsel temsillerini bulunuz.

Tablo 4

Bileşke İşlemi $(\circ)$		**Foksiyon**			
		a	**b**	**c**	**d**
Fonksiyon	**a**				$(a \circ d)(x) = 2x^2 - 8$
	b				
	c	$(c \circ a)(x) = \sqrt{2x-5}$			
	d				

b) Tablo 4'te elde ettiğiniz fonksiyonları karşılaştırarak eşit olanları belirtiniz. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için gerekli koşullar hakkında çıkarımlarda bulununuz.

4. Yaptığınız tüm çalışmalardan yola çıkarak $h(x) = (f \circ g)(x)$ şeklinde tanımlı bileşke fonksiyonu ile ilgili nitel özelliklere dair varsayımlar oluşturunuz.

5. Oluşturduğunuz varsayımlara dayanarak bileşke fonksiyonlara ve bileşke fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin örüntüleri genelleyiniz.

6. Genellemelerinizin varsayımlarınızı karşılayıp karşılamadığını kontrol ederek uygun tanım ve değer kümesine sahip f ve g fonksiyonlarından elde edilen $h(x) = (f \circ g)(x)$ şeklinde tanımlı bileşke fonksiyonu ile ilgili nitel özelliklere dair önermelerinizi matematiksel olarak doğrulanabilecek şekilde sununuz.

7. Önermelerinizin gerçek yaşam bağlamında kullanışlılığını değerlendirmek için aşağıdaki problemi çözünüz.

Bir ürünün etiket fiyatı x TL olarak belirlenmiştir. Bu ürüne etiket fiyatı üzerinden önce %10 indirim yapılmış, ardından indirimli fiyat üzerinden %20 indirim daha yapılmıştır. İndirimler sonucunda oluşan satış fiyatı P fonksiyonu ile ifade edilmiştir.



Satış fiyatına belli oranda KDV (katma değer vergisi) eklenerek elde edilen net fiyat V TL ile gösterilmektedir.

Satış Fiyatı	: ..... P TL
KDV	: + %10
Net Fiyat	: ..... V TL

a) Ürünün P satış fiyatını etiket fiyatı türüne göre modelleyen fonksiyonun cebirsel temsilini bulunuz.

b) Ürünün V net fiyatını P satış fiyatı türünde modelleyen fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

c) Ürünün V net fiyatını etiket fiyat türünde modelleyen fonksiyonun cebirsel temsilini bulunuz.

ç) Etiket fiyatı 500 TL olan bir ürünün 100 adet satılması sonucunda elde edilecek net gelir kaç TL'dir?

8. Aşağıdaki önermeleri cebirsel olarak ispatlayınız veya grafiksel olarak doğrulayınız. İspatınızı cebirsel olarak gerçekleştirirken mantık bağlaçlarını ve niceleyicileri, ispatın sistematikliğini ve matematiksel kesinliğini yansıtacak şekilde kullanınız.

a) "f ve g fonksiyonları bire bir iken $f \circ g$ fonksiyonu da bire birdir."

önermesinin ispatı ile ilgili verilen Tablo 5'i uygun şekilde doldurunuz.

Tablo 5

Önermenin İspat Adımları	Önermenin Cebirsel İspatı
f ve g fonksiyonlarının bire bir fonksiyon olduğu gösterilir.	
Önerme, mantık bağlaçları ve niceleyiciler kullanılarak cebirsel olarak yazılır.	
Bileşke fonksiyonun gösteriminden yararlanarak g fonksiyonunun değerlerinin eşitliği gösterilir.	
g fonksiyonunun bire birliği kullanılarak bağımsız değişkenlerin eşitliği gösterilir ve ispat tamamlanır.	

b) Aşağıda "f fonksiyonu çift fonksiyon ise g ∘ f fonksiyonu da çift fonksiyondur." önermesinin ispatı ile ilgili verilen tablodaki boşlukları tamamlayınız.

Tablo 6

Önermenin İspat Adımları	Önermenin Cebirsel İspatı
f ve g fonksiyonları tanımlanır.	
Önerme, mantık bağlaçları ve niceleyiciler kullanılarak cebirsel olarak yazılır.	
g ∘ f fonksiyonunun gösteriminden yararlanılır.	
f nin çift fonksiyon olduğunu gösteren cebirsel eşitliğin iki tarafı da g ile bileşke oluşturulur.	
Bir önceki adımda bulunan eşitlikte bileşke işlemleri 3. adımdaki eşitlik kullanılarak gösterildiğinde ispat tamamlanır.	

c) b maddesinde verilen önermeyi aşağıdaki adımları matematik yazılımında uygulayarak grafiksel olarak doğrulayınız.

1. adım: Bilgisayar veya etkileşimli tahtada matematik yazılımını açarak **Sürgü** kısmını seçiniz. Buradan a, b ve c sürgülerini oluşturunuz.

2. adım: **Giriş** bölümüne $f(x) = (x + a)^2$ yazınız.

3. adım: Aynı işlemi $g(x) = (x + b)^2$ ve $h(x) = cx + 5$ fonksiyonlarının grafiklerini çizmek için kullanınız.

4. adım: **Giriş** bölümüne $g(f(x))$ yazınız.

5. adım: **Giriş** bölümüne $h(f(x))$ yazınız.

6. adım: Oluşan bileşke fonksiyonların grafiklerinde a, b ve c sürgülerini hareket ettirerek grafikteki değişimleri gözlemleyiniz.

9. Doğrulama ve ispat yöntemlerinizi kullanışlılık açısından sınıf arkadaşlarınızla birlikte değerlendiriniz.

Önermelerin ispatına yönelik Çalışma Kağıdı'na ve Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

5. Örnek

Mustafa, İstanbul'dan Sakarya'ya yapacağı yolculuk için kesintisiz ulaşım imkânı sunması ve yakıt tüketiminin daha düşük olmasından dolayı daha verimli bir güzergâh olan görseldeki Kuzey Marmara Otoyolu'nu tercih etmiştir.



Mustafa'nın aracının ilk 60 dakikada aldığı yol için t dakikada katettiği mesafe kilometre cinsinden aşağıdaki fonksiyonla ifade edilmektedir.

$$f(t) = t + \frac{t^2}{40}$$

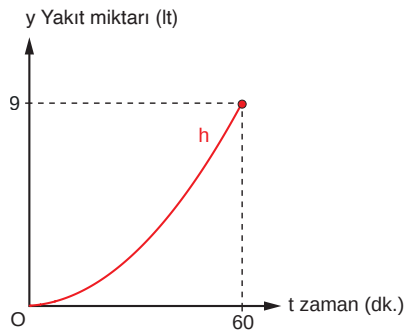
Aracın aldığı yol x km, yola bağlı olarak harcadığı yakıt miktarı ise litre cinsinden aşağıdaki fonksiyonla ifade edilmektedir.

$$g(x) = 0,06x$$

Bileşke fonksiyonunun nitel özellikleri için oluşturulan önermelerden yararlanarak aracın otoyolda yol alırken zamana bağlı olarak harcadığı yakıt miktarını veren fonksiyonun nitel özelliklerini bulunuz.

Çözüm

Aracın zamana bağlı olarak harcadığı yakıt miktarını veren h fonksiyonunun cebirsel temsili $h(t) = (g \circ f)(t) = g(f(t)) = g\left(t + \frac{t^2}{40}\right) = 0,06 \cdot \left(t + \frac{t^2}{40}\right)$ buradan $h(t) = 0,06 \cdot t + 0,0015 \cdot t^2$ olarak bulunur. $t \in [0, 60]$ için $g \circ f$ fonksiyonunun grafik temsili aşağıda verilmiştir.



f fonksiyonu aracın zamana bağlı aldığı yolu gösterdiği için $g \circ f$ fonksiyonunun tanım kümesi f fonksiyonunun tanım kümesi ile aynı olur. Bileşke fonksiyonun grafiği incelendiğinde tanım kümesinin $[0, 60]$, görüntü kümesinin ise $[0, 9]$ olduğu görülür.

f ve g fonksiyonları tanımlandığı aralıklarda bire birdir. Bundan dolayı $g \circ f$ fonksiyonu da bire birdir. $g \circ f: [0, 60] \rightarrow [0, 9]$ olduğundan bileşke fonksiyonu örtendir.

Bileşke fonksiyonun grafiği incelendiğinde sıfırının $t = 0$ olduğu görülür.

f, g ve h fonksiyonları $[0, 60]$ nda tanımlı olduğu için ne tek ne çift fonksiyondur.

Bileşke fonksiyonun grafik temsili incelendiğinde aldığı minimum değer $y = 0$, minimum değeri veren noktası ise $t = 0$ olmaktadır. Maksimum noktası $t = 60$ için $y = 9$ olacaktır.

Bileşke fonksiyon $[0, 60]$ nda artan fonksiyondur. Bileşke fonksiyonunun $(0, 60]$ nda işareti pozitiftir.

Sıra Sizde 4

Göldeki artan su kirliliği, balık popülasyonu ve göl ekosisteminde yer alan diğer canlılar üzerinde olumsuz etkiler yaratmaktadır. Kirlenmenin etkisiyle özellikle balık türleri için yaşamsal öneme sahip olan yiyecek kaynakları hızla tükenmektedir. Bu durum popülasyonun azalmasına ve ekosistemin dengesinin bozulmasına yol açmaktadır.

Bu kapsamda gölde yaşayan belirli bir balık türünün polülasyonunun zamana (yıl) bağlı değişimi $f(t) = 1000 \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t}$ şeklinde f fonksiyonu ile modellenmiştir. Buna bağlı olarak gölde kalan yiyecek miktarının (kg) balık popülasyonuna bağlı olarak değişimi ise $g(x) = 100 - \frac{1}{10} \cdot x$ şeklinde g fonksiyonu ile modellenmiştir.

Buna göre

a) Gölde kalan yiyecek miktarının zamana bağlı değişimini veren h fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

b) h fonksiyonunun nitel özelliklerini bulunuz.

6. Örnek

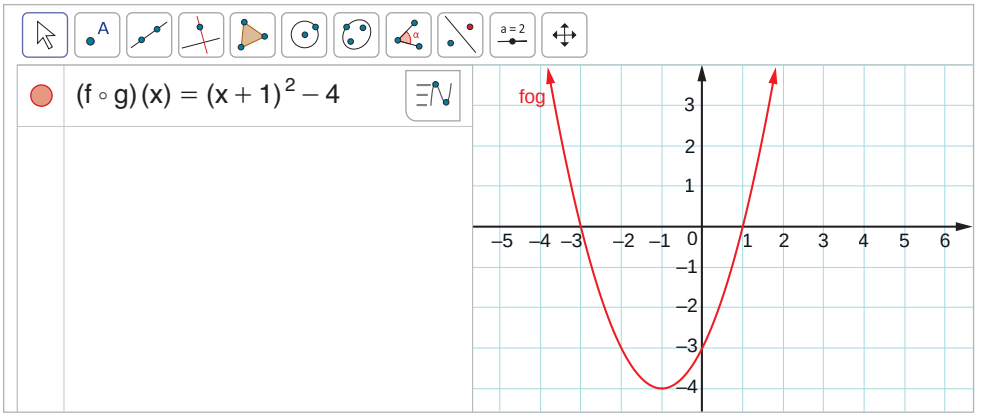
Gerçek sayılarda $f(x) = x - 3$ ve $g(x) = (x+1)^2 - 1$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar verilmiştir. Buna $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonlarının

1. Cebirsel temsillerini bulunuz.
2. Matematik yazılımında grafiklerini çiziniz.
3. Artan veya azalan oldukları aralıkları bulunuz.
4. Maksimum-minimum noktası ve değerini bulunuz.
5. Sıfırlarını bulunuz.

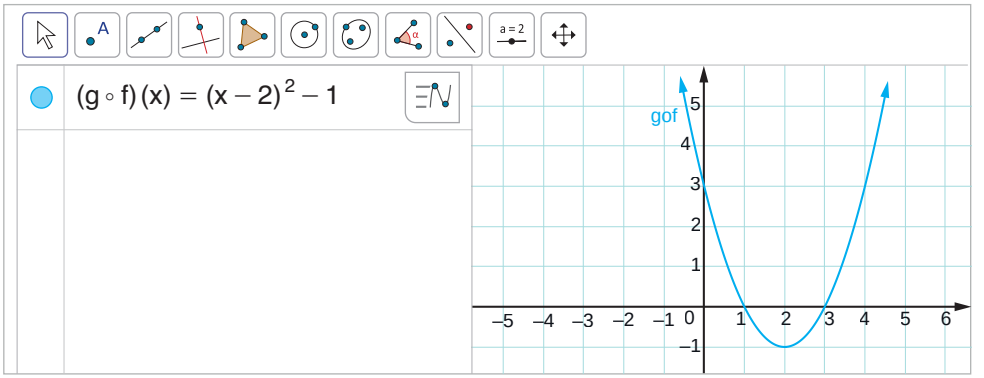
Çözüm

1. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x+1)^2 - 4$ ve $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-2)^2 - 1$

2. Aşağıdaki Grafik 1'de $f \circ g$ fonksiyonu ,Grafik 2'de ise $g \circ f$ fonksiyonu verilmiştir.



Grafik 1



Grafik 2

3. $(f \circ g)(x) = (x+1)^2 - 4$ ve $(g \circ f)(x) = (x-2)^2 - 1$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar birer karesel fonksiyon olduğundan grafikleri Grafik 1 ve Grafik 2'de görüldüğü gibi paraboldür. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x+1)^2 - 4$ fonksiyonu $(-\infty, -1]$ nda azalan, $[-1, \infty)$ nda artandır. Grafik 1'de bu durum doğrulanır. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-2)^2 - 1$ fonksiyonu $(-\infty, 2]$ nda azalan, $[2, \infty)$ nda artandır. Grafik 2'de bu durum doğrulanır.

4. Grafik 1'de $f \circ g$ fonksiyonunun minimum değeri $y = -4$, minimum değeri veren nokta $x = -1$'dir. Fonksiyonun maksimum noktası ve maksimum değeri yoktur. Grafik 2'de $g \circ f$ fonksiyonunun minimum değeri $y = -1$, minimum değeri veren nokta $x = 2$'dir. Fonksiyonun maksimum noktası ve maksimum değeri yoktur.

5. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x+1)^2 - 4$ fonksiyonunun sıfırları için $(f \circ g)(x) = 0$ olması incelenir. Bu durumda $(x+1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x+1 = 2$ ve $x+1 = -2$ olur. $x = 1$ ve $x = -3$ değerleri fonksiyonun sıfırları olarak bulunur. Bu değerler Grafik 1'de verilmiştir.
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-2)^2 - 1$ fonksiyonunun sıfırları için $(g \circ f)(x) = 0$ olması incelenir. Bu durumda $(x-2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 1 \Rightarrow x-2 = 1$ ve $x-2 = -1$ olur. $x = 3$ ve $x = 1$ değerleri fonksiyonun sıfırları olarak bulunur. Bu değerler Grafik 2'de verilmiştir.

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Sıra Sizde 5

Gerçek sayılarda $f(x) = 3 - x$ ve $g(x) = 2x$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar verilmiştir.

Buna göre $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonlarının

1. Cebirsel temsillerini yazınız.

2. Tek veya çift fonksiyon olma durumlarını cebirsel olarak gösteriniz.

3. Grafiklerini çizerek 2. maddede bulduğunuz sonuçları doğrulayınız.

7. Örnek

"f gerçek sayılarda tanımlı azalan bir fonksiyon ve g gerçek sayılarda tanımlı artan bir fonksiyon olmak üzere $g \circ f$ bileşke fonksiyonu gerçek sayılarda azalan bir fonksiyondur."

Verilen önermeyi ispatlayınız.

Çözüm

1. adım: f azalan bir fonksiyon ise $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ dir.

2. adım: g artan bir fonksiyon ise $\forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ için $x_3 < x_4 \Rightarrow g(x_3) < g(x_4)$ tür.

3. adım: g artan fonksiyon ve $f(x_1) > f(x_2)$ için $g(f(x_1)) > g(f(x_2))$ olur.

Buna göre $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow (g \circ f)(x_1) > (g \circ f)(x_2)$ olduğu görülür. Bundan dolayı $g \circ f$ bileşke fonksiyonu gerçek sayılarda azalan fonksiyondur.

Araştırma Ödevi

Aşağıdaki görevleri gerçekleştirerek araştırma ödevini öğretmeninizin belirlediği süre içinde eksiksiz olarak tamamlayınız.

- Bileşke fonksiyonların gerçek yaşamda kullanım alanlarıyla ilişkilendirildiği örnek problem durumlarını araştırınız.
- Belirlediğiniz gerçek yaşam durumuna uygun fonksiyonların bağımlı ve bağımsız değerlerini içeren bir tablo oluşturunuz.
- Tablodaki veriler yardımıyla fonksiyonunun cebirsel temsilini oluşturunuz ve grafiğini çiziniz.
- Yaptığınız çalışmanın tüm aşamalarını içeren bir rapor hazırlayıp sınıf arkadaşlarınıza sununuz.
- Çalışmanız Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı kullanılarak öğretmeniniz tarafından değerlendirilecektir.

Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

8. Örnek

$f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{3\}, f(x) = \dfrac{3x - 7}{x - 3}$ şeklinde bir f fonksiyonu tanımlanıyor. Buna göre aşağıdaki bileşke fonksiyon değerlerini bulunuz.

1. $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{\text{7 tane}}(5)$

2. $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{\text{8 tane}}(2026)$

Çözüm

1. $f(x) = \frac{3x-7}{x-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x-7}{x-3}$ olur. Diğer bir ifadeyle $f(x) = f^{-1}(x)$ dir.

$(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x)$ ifadesinde tekrarlanan fonksiyon sayısı tek sayı olduğundan ikinci, dördüncü ve altıncı f yerine f^{-1} yazılırsa

$(f \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1} \circ f)(x) = f(x) = \frac{3x-7}{x-3}$ olur.

Bu durumda $x = 5$ için $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{\text{7 tane}}(5) = f(5) = \frac{3 \cdot 5 - 7}{5-3} = \frac{8}{2} = 4$ olarak bulunur.

2. $f(x) = f^{-1}(x)$ olduğundan $(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x)$ ifadesinde tekrarlanan fonksiyon sayısı çift sayı olduğundan ikinci, dördüncü, altıncı ve sekizinci f yerine f^{-1} yazılırsa $(f \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1} \circ \ldots \circ f \circ f^{-1})(x) = x$ olur. Bu durumda $x = 2026$ için sonuç 2026 olarak bulunur.

Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonu ile tersi olan f^{-1} fonksiyonun bileşkesi doğrusal referans fonksiyona eşittir. Bu eşitlik $(f \circ f^{-1})(x) = x$ şeklinde gösterilir.

9. Örnek

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı bire bir ve örten f ve g fonksiyonları için $(f \circ g)(x) = f(x) + g(x)$ eşitliği sağlanmaktadır. Buna göre $f(3) = 5$ ise $(f \circ g^{-1})(3)$ işleminin sonucunu bulunuz.

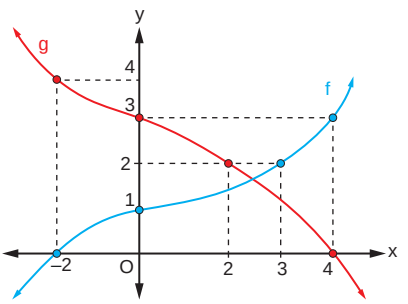
Çözüm

$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$ dir. Buradan hareketle $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) + g(x)$ fonksiyonunda x yerine $g^{-1}(x)$ yazılırsa $(f(g(g^{-1}(x))) = f(g^{-1}(x)) + g(g^{-1}(x))$ olur ve $(g \circ g^{-1})(x) = x$ olduğundan $f(x) = (f \circ g^{-1})(x) + x$ şeklinde yazılır. Burada $x = 3$ yazılırsa

$f(3) = (f \circ g^{-1})(3) + 3 \Rightarrow 5 = (f \circ g^{-1})(3) + 3 \Rightarrow (f \circ g^{-1})(3) = 2$ olarak bulunur.

Sıra Sizde 6

1.



Yanda $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.

Grafikte yer alan bilgilere göre $(f \circ g^{-1})(4)$ **ve** $(f^{-1} \circ g)(2)$ **değerlerini bulunuz.**

2. f, g ve h; gerçek sayılarda tanımlı bire bir ve örten fonksiyonlar olmak üzere

$f(2x-5) = g^{-1}(3x-1) = h(x+5)$ eşitliği veriliyor.

Buna göre $(g \circ f)(3) + (f^{-1} \circ h)(3)$ **değerini hesaplayınız.**

3. f, g gerçek sayılarda tanımlı iki fonksiyon ve k gerçek sayı olmak üzere $(f \circ g)(x) = 2 \cdot g(x) + 3$ ve $(g \circ f)(x) = k \cdot f(x) - 5$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar verilmiştir.

$g(1) = f^{-1}(7)$ **olduğuna göre k değerini bulunuz.**

Performans Görevi

Adı: Bileşke Fonksiyonlar ve Bileşke Fonksiyonların Nitel Özellikleri

Beklenen Performans: Bileşke fonksiyonlar ve bileşke fonksiyonların nitel özelliklerinin incelenmesiyle ilgili bilgileri araştırmak ve bu bilgileri dijital araçlar kullanarak dosya hazırlama ve sunma.

Görev: Bu görevde bileşke fonksiyonlar ve bileşke fonksiyonların nitel özelliklerini (Tanım kümesi, görüntü kümesi,bire birlik, örtenlik, artanlık-azalanlık vb. gibi) belirleyeceğiniz senaryolar üzerinden inceleyerek sunum dosyası hazırlamanız ve sınıf arkadaşlarınıza sunmanız beklenmektedir.

Yönerge:

Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Yapılacak işleri ve çalışma takviminizi içeren bir çalışma planı oluşturunuz.
- Çalışmanızı oluştururken takip edeceğiniz adımları belirleyiniz.
- Çalışmanızı öğretmeninizin belirlediği sürede tamamlayınız.

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Günlük hayatta bileşke fonksiyonların kullanılabileceği üç farklı senaryo belirleyiniz.
- (Örneğin yakıt tüketimi veya vücut kitle indeksi)
- Bu senaryoları fonksiyon şeklinde modelleyiniz.
- Bu fonksiyonları birleştirerek bir bileşke fonksiyon oluşturunuz.
- Oluşturduğunuz bileşke fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili soruları cevaplayınız. Cevaplarınızı içeren dosyanızı dijital yollarla oluşturunuz.
- Çalışmanız için bir sunum hazırlayınız.

Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz:

- Oluşturduğunuz sunuyu sınıfınızda arkadaşlarınızla paylaşınız.
- Tamamladığınız dosyayı öğretmeninize teslim ediniz.

Değerlendirme: Performans göreviniz öğretmeniniz tarafından aşağıdaki karekodda verilen Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Kontrol Noktası

A, B, C $\subseteq \mathbb{R}$ ve f: A $\rightarrow$ B ve g: B $\rightarrow$ C tanımlı fonsiyonlar olmak üzere g $\circ$ f fonksiyonunun nitel özellikleri aşağıdaki gibidir.

- Bire Birlik İncelemesi

f	g	g $\circ$ f
bire bir	bire bir	bire bir
bire bir	bire bir değil	bire bir/ bire bir değil
bire bir değil	bire bir	bire bir değil
bire bir değil	bire bir değil	bire bir değil

- Örtenlik İncelemesi

f	g	g $\circ$ f
örten	örten	örten
örten	örten değil	örten değil
örten değil	örten	örten/ örten değil
örten değil	örten değil	örten değil

- Artanlık-Azalanlık İncelemesi

f	g	g $\circ$ f
artan	artan	artan
artan	azalan	azalan
azalan	artan	azalan
azalan	azalan	artan

- Teklik-Çiftlik İncelemesi

f	g	g $\circ$ f
çift	tek/çift ne tek ne çift	çift
tek	tek	tek
tek	çift	çift

- Maksimum Nokta-Minimum Nokta İncelemesi

f	g	g $\circ$ f
maksimumu var	artan	maksimumu var
maksimumu var	azalan	minimumu var
minimumu var	artan	minimumu var
minimumu var	azalan	maksimumu var

Ek soruların yer aldığı 2. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Bileşke Fonksiyonların Nitel Özellikleri)

Alıştırmalar

1. Uygun koşullarda tanımlı bir f fonksiyonunun bazı x gerçek sayıları için aldığı değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

x	−9	−3	1	2	5	6
f(x)	5	6	−3	1	2	−9

Buna göre (f $\circ$ f $\circ$ f) (5) değerini bulunuz.

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ ve $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 3$ şeklinde tanımlı f, g fonksiyonları verilmiştir.

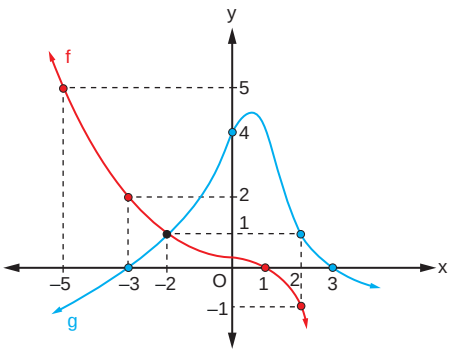
Buna göre aşağıdaki tabloyu verilen önermelerin doğru ya da yanlış olma durumuna göre doğru ise D, yanlış ise Y yazarak doldurunuz.

Önermeler	D/Y
f ∘ f bire bir fonksiyondur.	
f ∘ f örten fonksiyondur.	
f ∘ g bire bir fonksiyondur.	
f ∘ g örten fonksiyondur.	

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için $(f \circ g)(x) = \log_2(16 \cdot x^2 + 1) + 17, g(x) = 4x - 1$ ifadeleri veriliyor.

Buna göre f fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

4.



Yanda $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.

Buna göre $\dfrac{(f \circ f)(-2) + (g \circ f)(-3)}{(f \circ g)(2) - (g \circ g)(3)}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

5. Gerçek sayılarda tanımlı f tek, g ve h çift fonksiyonları için $f(-2) = -4$, $g(-3) = 2$ ve $h(-4) = 5$ eşitlik leri verilmiştir.

Buna göre $(f \circ g)(3) - (h \circ f)(2)$ ifadesinin değerini bulunuz.

5.2. FONKSİYONLARDA DÖRT İŞLEM

Konuya Başlarken



Güneş enerjisi, Güneş'ten elde edilen yenilenebilir, doğal ve tükenmez bir enerji kaynağıdır. Çevre dostu ve ekonomik olması nedeniyle gelecekte enerji ihtiyacının karşılanmasında önemli bir rol oynayacağı tahmin edilmektedir. Güneş enerjisi; elektrik üretimi, ısınma ve aydınlatma gibi birçok alanda kullanılabilir.

Bu doğrultuda hem çevreyi korumak hem de ev ekonomisinde tasarruf sağlamak isteyen Seyfi Bey, evine güneş enerjisi sistemi kurdurmuştur. Amacı, dışarıdan elektrik alma ihtiyacını mümkün olduğunca azaltmaktır.

Evde kullanılan bazı elektrikli cihazların x saatteki enerji tüketimleri kilovatsaat (kWh) cinsinden aşağıda verilmiştir.

- Buzdolabı: $4x$ kWh
- Kombi: $(2x + 3)$ kWh
- Aydınlatma: $(3x + 1)$ kWh

Kurulan güneş enerjisi sisteminin x saatteki elektrik üretimi $5x$ kWh'tir.

Buna göre

1. **Buzdolabı, kombi ve aydınlatmanın tükettiği enerjinin tamamının tek bir fonksiyonla nasıl ifade edilebileceğini ve bu durumun gerçekleşmesi için hangi şartların sağlanması gerektiğini yorumlayınız.**
2. **Seyfi Bey'in dışarıdan alması gereken elektrik enerjisi miktarını gösteren fonksiyonun nasıl elde edilebileceğini yorumlayarak fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.**

3. Uygulama

Fonksiyonlarda Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. a) $f:[1,4] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$ ve $g:[2,5] \to \mathbb{R}, g(x) = x$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar için verilen tabloyu örneklerdeki gibi doldurunuz.

	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 4$	$x_4 = 5$
$f(x)$	$f(1) = 5$			
$g(x)$	Tanımsız			
$f(x) + g(x)$				
$f(x) - g(x)$				

b) Tablodan elde ettiğiniz sonuçları inceleyiniz, f ve g fonksiyonları kullanılarak toplama ve çıkarma işlemlerinin tanımlanıp tanımlanamayacağına ilişkin fikirlerinizi yazınız.

c) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ve $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ eşitliklerinden elde edilen $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının cebirsel temsillerini yazınız.

ç) f, g, $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

d) f, g, $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının grafik temsillerini inceleyerek bu fonksiyonların tanım ve değer kümeleri arasındaki ilişkileri belirtiniz.

e) f, g, $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının cebirsel ve grafik temsilini inceleyerek f ve g fonksiyonları ile yapılan işlemler sonucunda oluşan $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının tanımlı olabilmesi için gereken asgari koşulları tespit ediniz.

2. **a)** Gerçek sayılarda $h(x) = x^2$ ve $s(x) = x$ şeklinde tanımlı fonksiyonlarla elde edilen $h + s$ ve $h - s$ fonksiyonlarının tanım kümelerini bularak bu fonksiyonların cebirsel ve grafik temsilini oluşturunuz.

b) $h + s$ ve $h - s$ fonksiyonlarında h ve s fonksiyonlarına göre oluşan değişimi hem grafik üzerinde hem de cebirsel olarak değerlendiriniz.

3. Yaptığınız çalışmalardan yola çıkarak iki fonksiyona yapılan toplama ve çıkarma işlemleri sonucunda yeni fonksiyonların elde edilebilmesi ile bu iki fonksiyonun tanım kümelerinin ilişkisini hem sözel hem de cebirsel olarak ifade ediniz.

10. Örnek

Uygun koşullarda $f(x) = \sqrt{x-1}$ ve $g(x) = \sqrt{4-x}$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar verilmiştir.

Buna göre

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ve $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ şeklinde tanımlı fonksiyonların cebirsel temsilini bularak tanım kümelerini belirtiniz.

2. Matematik yazılımı ile $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının grafiklerini çizerek 1. maddede yer alan çözümü doğrulayınız.

Çözüm

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$

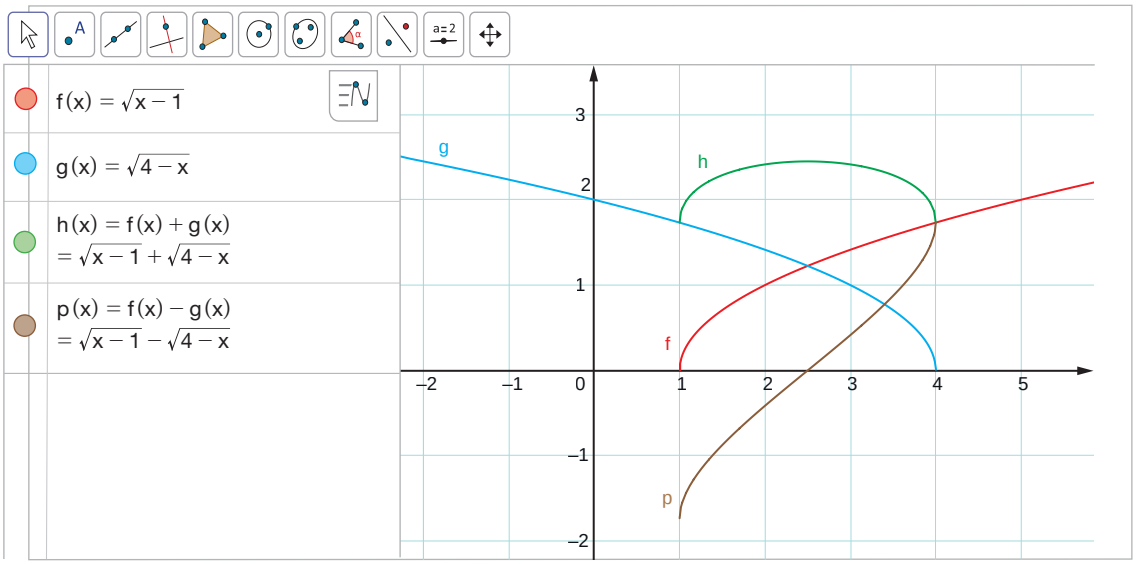
$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{4-x}$

$f(x) = \sqrt{x-1}$ şeklindeki fonksiyonun tanımlı olması için $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ olmalıdır. f nin tanım aralığı $[1, \infty)$ dır. $g(x) = \sqrt{4-x}$ şeklindeki fonksiyonun tanımlı olması için $4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$ olmalıdır. g nin tanım aralığı $(-\infty, 4]$ dır.

$f(x) + g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$ şeklindeki fonksiyonun tanımlı olması için $x \geq 1$ ve $x \leq 4$ olmalıdır. Tanım kümesi $(-\infty, 4] \cap [1, \infty) = [1, 4]$ olur.

$f(x) - g(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{4-x}$ şeklindeki fonksiyonun tanımlı olması için $x \geq 1$ ve $x \leq 4$ olmalıdır. Tanım kümesi $(-\infty, 4] \cap [1, \infty) = [1, 4]$ olur.

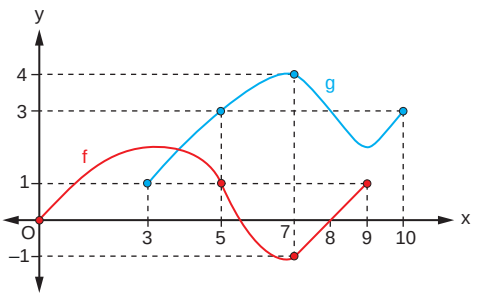
2. Aşağıda f + g ve f − g fonksiyonlarının grafiği çizilmiştir.



Grafik incelendiğinde f + g ve f − g fonksiyonlarının tanım kümesinin f ve g fonksiyonlarının tanım kümelerinde ortak olan değerlerden oluştuğu görülür. f + g ve f − g fonksiyonlarının tanım kümesi $(-\infty, 4] \cap [1, \infty) = [1, 4]$ dır. Bu durumun cebirsel temsilde bulunan tanım kümesini doğruladığı görülür.

Sıra Sizde 7

Aşağıda f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre

1. f, g, f + g ve f − g fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz.

2. (f + g) (5) ve (f − g) (7) değerlerini hesaplayınız.

11. Örnek

f ve g gerçek sayılarda tanımlı bire bir ve örten fonksiyonlar olmak üzere $f^{-1}(3x - g(x+1)) = 4x - 5$ eşitliği verilmiştir.

Buna göre $(f+g)(3)$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

Soruda verilen eşitliğin sol ve sağ taraflarının f fonksiyonu ile bileşkesi alınır.

$f^{-1}(3x - g(x+1)) = 4x - 5 \Rightarrow f(f^{-1}(3x - g(x+1)) = f(4x - 5)$

$\Rightarrow 3x - g(x+1) = f(4x - 5)$

$\Rightarrow 3x = f(4x - 5) + g(x+1)$ elde edilir.

Elde edilen eşitlikte $f(3)$ ve $g(3)$ değerlerinin toplamını hesaplamak için $x = 2$ yazılır.

$3 \cdot 2 = f(4 \cdot 2 - 5) + g(2+1)$

$6 = f(3) + g(3) \Rightarrow (f+g)(3) = 6$ bulunur.

Sıra Sizde 8

Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için $f(x) = x + 1$ ve $(2f + g)(x) = x^2 + 2x - 2$'dir.

Buna göre $g(2)$ değerini bulunuz.

4. Uygulama

Fonksiyonlarda Çarpma ve Bölme İşlemleri

Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek uygulamayı tamamlayınız.

1. a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -x + 3$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar için verilen tabloyu örneklerdeki gibi doldurunuz.

	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
$f(x)$	$f(1) = 1$			
$g(x)$	$g(1) = 2$			
$f(x) \cdot g(x)$				
$\frac{f(x)}{g(x)}$				

b) Tablodan elde ettiğiniz sonuçları inceleyerek, f ve g fonksiyonları kullanılarak çarpma ve bölme işlemlerinin tanımlanıp tanımlanamayacağına ilişkin fikirlerinizi yazınız. Elde ettiğiniz fikirleri sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ve $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ eşitliklerinden yararlanarak çarpma ve bölme işlemlerine karşılık gelen cebirsel ifadeleri bulunuz.

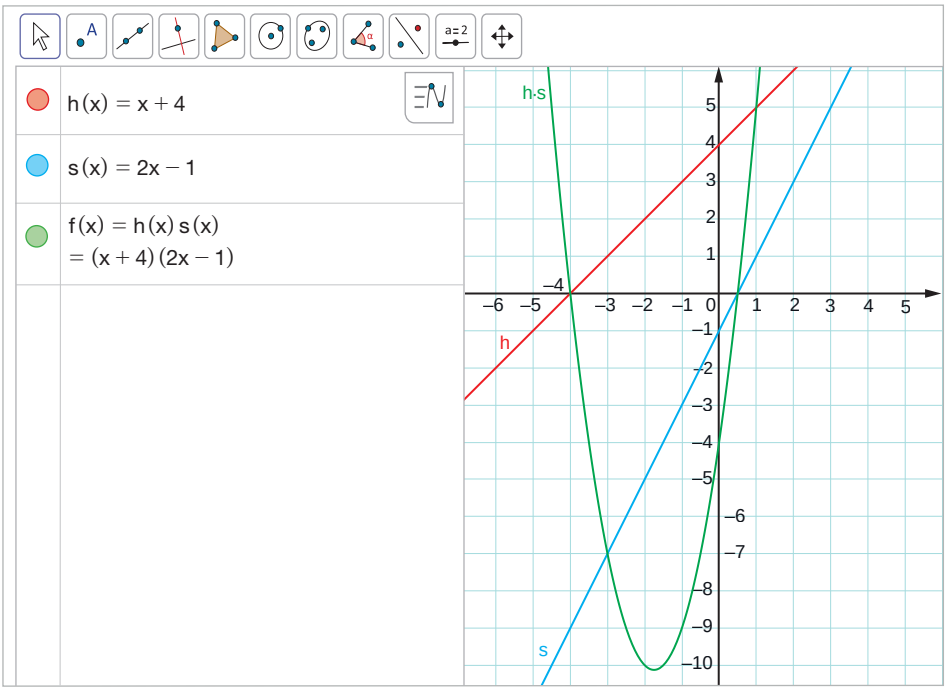
2. Matematik yazılımında aşağıdaki adımları uygulayarak $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x + 4$ ve $s: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $s(x) = 2x - 1$ şeklinde tanımlı fonksiyonların ve bu fonksiyonlarla yapılan işlemler sonucunda oluşan $f(x) = (h \cdot s)(x)$ ve $g(x) = \left(\frac{h}{s}\right)(x)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonların grafiklerini çiziniz ve bu grafikleri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) **1. adım: Giriş** bölümüne $h(x) = x + 4$ yazarak grafiğini çiziniz.

2. adım: Giriş bölümüne $s(x) = 2x - 1$ yazarak grafiğini çiziniz.

3. adım: Giriş bölümüne $f(x) = (h \cdot s)(x)$ yazarak grafiğini çiziniz.

Verilen adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



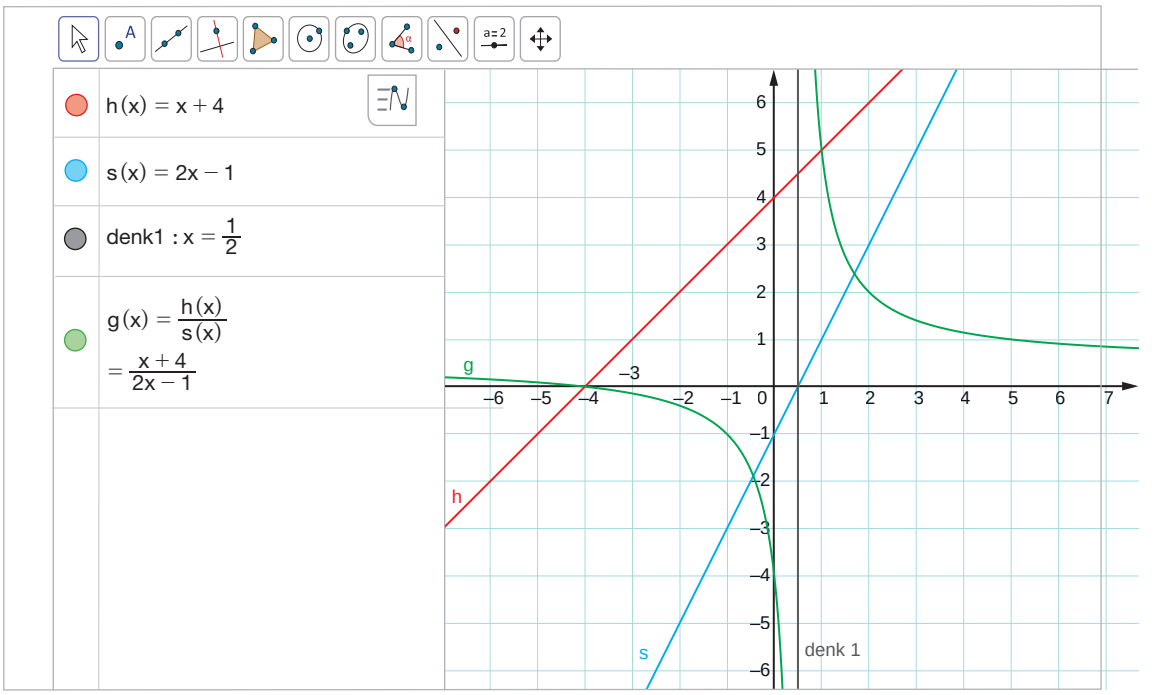
b) **1. adım: Giriş** bölümüne $h(x) = x + 4$ yazarak grafiğini çiziniz.

2. adım: Giriş bölümüne $s(x) = 2x - 1$ yazarak grafiğini çiziniz.

3. adım: Giriş bölümüne $x = \frac{1}{2}$ yazarak doğruyu çiziniz.

4. adım: Giriş bölümüne $g(x) = \frac{h(x)}{s(x)}$ yazarak grafiğini çiziniz.

Verilen adımların matematik yazılımında uygulandığı benzer bir örneğinin ekran görüntüsü aşağıda verilmiştir.



c) $h, s, h \cdot s$ ve $\frac{h}{s}$ fonksiyonlarında oluşan değişimi hem elde ettiğiniz grafikler üzerinden hem de cebirsel olarak değerlendiriniz.

3. Yaptığınız çalışmalardan yola çıkarak iki fonksiyona yapılan çarpma ve bölme işlemleri sonucunda yeni fonksiyonların elde edilebilmesi ile bu iki fonksiyonun tanım kümelerinin ilişkisini hem sözel hem de cebirsel olarak ifade ediniz.

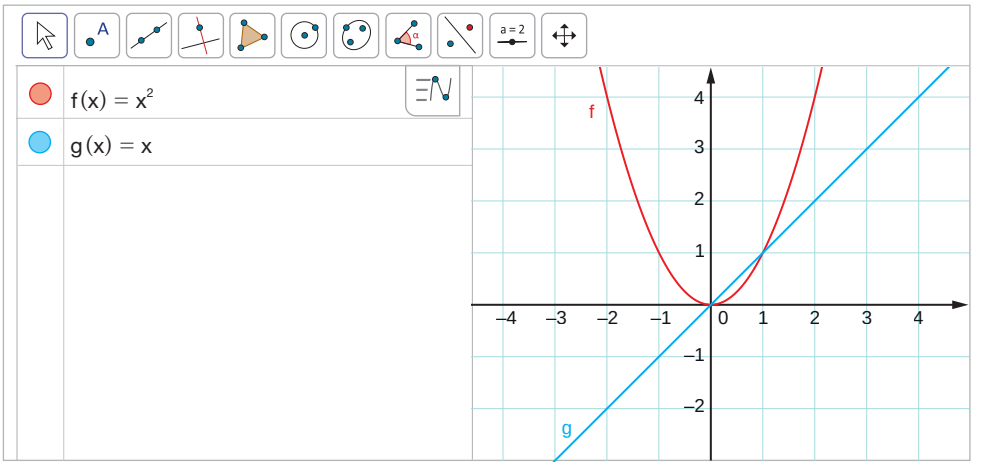
12. Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar verilmiştir.

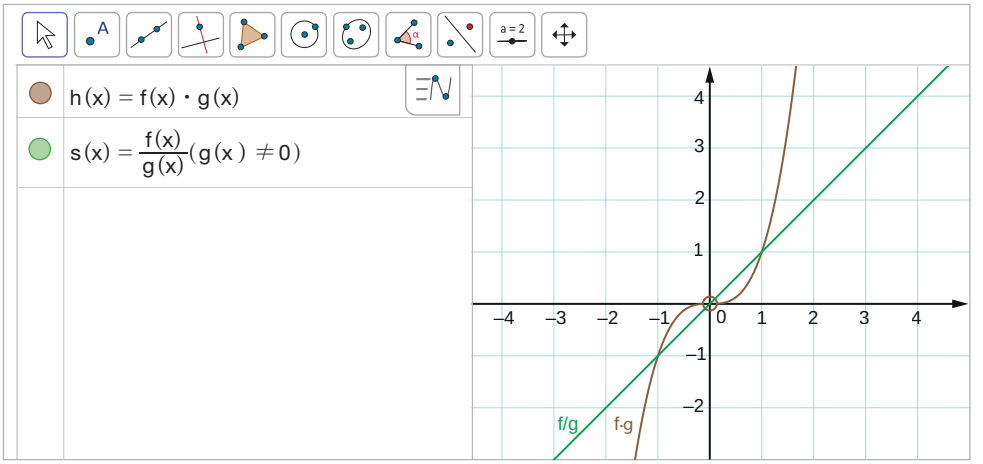
Buna göre $f \cdot g$ ve $\frac{f}{g}$ fonksiyonlarının grafiklerini matematik yazılımı kullanarak çiziniz ve bu fonksiyonların f ve g fonksiyonlarının grafiklerine göre nasıl bir yapısal değişim gösterdiğini yorumlayınız.

Çözüm

Grafik 1'de f ve g fonsiyonlarının Grafik 2'de ise $f \cdot g$ ve $\frac{f}{g}$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Grafik 1



Grafik 2

Grafik 1'de f fonksiyonunun parabolik, g fonksiyonunun doğrusal olduğu görülür. Grafik 2'de f ve g fonksiyonlarının çarpımı olan fonksiyon $\mathbb{R}$ de tanımlı $h(x) = (f \cdot g)(x) = x^3$ şeklinde olup yapısı f ve g den farklı olan bir eğri oluşturur. Genel olarak çarpım sonucu oluşan fonksiyonlar çarpımı oluşturan fonksiyonların yapısından farklı olur.

Grafik 2'de f nin g ye bölümünden oluşan fonksiyon $\mathbb{R} - \{0\}$ da tanımlı $s(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x} = x$, şeklinde bir fonksiyon olup bu fonksiyon doğrusal bir fonksiyondur ve $x = 0$'da tanımsızdır.

Sıra Sizde 9

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. f ve g gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonlar olmak üzere $(f+g)(x) = x^2 + 3x$ ve $(f-g)(2x) = 2x + 1$ eşitlikleri verilmiştir.

Buna göre $(f \cdot g)(2)$ değerini hesaplayınız.

2. $f: (-2, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 8$ ve $g: (-1, 5] \to \mathbb{R}, g(x) = x + 5$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar veriliyor.

Buna göre $f \cdot g$ ve $\frac{f}{g}$ fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümelerini bulunuz, matematik yazılım programında grafiklerini çiziniz.

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

13. Örnek

Ahsen ve Işıl, farklı şehirlerde üniversite eğitimi gördükleri için her gün mobil bir uygulama üzerinden uzun süreli sesli görüşmeler yapmaktadır. Bu uygulama, görüşme süresince genel ağdan veri kullanmakta ve her 1 dakikalık görüşme için yaklaşık 5 MB veri harcamaktadır. Yüksek telefon faturasını azaltmak için operatör değiştirmek isteyen Ahsen ve Işıl, aşağıdaki tabloda yer alan iki farklı operatöre ait ücretlendirme bilgilerini incelemektedir.

Operatörler	Aylık Sabit Ücret (TL)	Kullanılan Her 1 MB İçin Ek Ücret (TL)
A	150	0,20
B	200	0,15

Buna göre

1. Ahsen'in A operatöründe mobil uygulama üzerinden aylık 180 dakikalık görüşme gerçekleştirmesi durumunda ödeyeceği ücreti bulunuz.

2. Ahsen'in A operatöründe, Işıl'ın B operatöründe mobil uygulama üzerinden aylık t dakikalık görüşmelerinin toplam ücretini veren r fonksiyonunu bulunuz.

3. Ahsen'in A operatöründe, Işıl'ın B operatöründe mobil uygulama üzerinden aylık 240 dakikalık görüşme gerçekleştirilmesi durumunda oluşacak ücret farkının TL cinsinden pozitif değerini bulunuz.

Çözüm

1. Görüşme süresi t (dakika) olmak üzere $f(t) = 5t$ şeklinde tanımlı fonksiyon süreye bağlı veri kullanımını gösterir. Kullanılan veri miktarı x olmak üzere A operatöründe kullanılan veri miktarına bağlı ücret fonksiyonu $g(x) = 0,2x + 150$ olmaktadır. Görüşme süresine bağlı ücret fonksiyonu ise $(g \circ f)(t) = g(f(t)) = 0,2(5t) + 150 = t + 150$ olarak elde edilir. Ahsen 180 dakikalık görüşme için $(g \circ f)(180) = 180 + 150 = 330$ TL ücret öder.

2. Ahsen'in A operatöründe mobil uygulama üzerinden aylık t dakikalık görüşmesinin ücretini veren fonksiyon $(g \circ f)(t) = t + 150$'dir.

   Işıl'ın kullandığı veri miktarı x olmak üzere B operatöründe kullanılan veri miktarına bağlı ücret fonksiyonu $h(x) = 0,15x + 200$ olmaktadır. Geçen süreye bağlı ücret fonksiyonu ise $(h \circ f)(t) = h(f(t)) = 0,15(5t) + 200 = 0,75 \cdot t + 200$ olarak elde edilir. Buradan $r(t) = g \circ f(t) + (h \circ f)(t) = t + 150 + 0,75 \cdot t + 200 = 1,75 \cdot t + 350$ olur.

3. Ahsen'in A operatöründe, Işıl'ın B operatöründe mobil uygulama üzerinden aylık 240 dakikalık görüşmeleri sonucunda oluşan ücret farkını veren fonksiyon k olmak üzere $k(t) = |(g \circ f)(t) - (h \circ f)(t)| = |t + 150 - (0,75 \cdot t + 200)| = |0,25 \cdot t - 50|$ olur. Buradan $t = 240$ için $k(t) = 10$ TL olarak bulunur.

Fonksiyonlarda dört işlem özelliklerinin yorumlanmasına ilişkin sorulardan oluşan Çalışma Kağıdı'na ve Analitik Dereceli Puanlama Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Sıra Sizde 10

Bir kimya laboratuvarında yürütülen deneyde ortam sıcaklığı ile reaksiyon süresi arasında bir ilişki olduğu gözlemlenmiştir. Deney ortamında sıcaklık arttıkça maddenin reaksiyon süresi azalmaktadır. Deney ortamının sıcaklığına x (°C) bağlı reaksiyon süresi t (sn.) arasındaki bağıntı $t(x) = \frac{720}{x+3}$ $(x > 0)$ şeklinde modellenmiştir. Laboratuvar, bu deneyin maliyetini reaksiyon süresine göre hesaplamakta; her bir saniye için 50 TL ücretlendirme yapmakta ve deney başına sabit 2000 TL ücret almaktadır. t reaksiyon süresine bağlı deneyin maliyeti (TL) ise g fonksiyonu ile modellenmiştir.

Buna göre

1. **Uygun deney ortamı sıcaklığının 9°C olması durumundaki reaksiyon süresini ve deney için ödenecek para miktarını TL cinsinden bulunuz.**

2. **Uygun deney ortamı sıcaklığının 9°C'tan 17°C'a çıkarılması durumunda deneyin TL cinsinden maliyetinin ne kadar değişeceğini bulunuz.**

Kontrol Noktası

$A \cap B \neq \varnothing$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ ve $\forall x \in A \cap B$ olmak üzere

- $f + g: A \cap B \to \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $f - g: A \cap B \to \mathbb{R}, (f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $f \cdot g: A \cap B \to \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g}: A \cap B \to \mathbb{R}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, (g(x) \neq 0)$ olur.

Ek soruların yer aldığı 3. Değerlendirme Soruları'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz. (İçerik: Fonksiyonlarda Dört İşlem)

Alıştırmalar

1. Gerçek sayılarda $g(x) = 2x^2 - 3$ ve $(3f - 2g)(x) = 7x^2 - 6x + 4$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar veriliyor.

Buna göre $f(1)$ değerini bulunuz.

2. $f: [2, 6] \to \mathbb{R}, f(x) = 4x - 1$ ve $g: [1, 5] \to \mathbb{R}, g(x) = -2x + 3$ şeklinde tanımlı f ve g fonksiyonları veriliyor.

Buna göre f + g fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız, tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

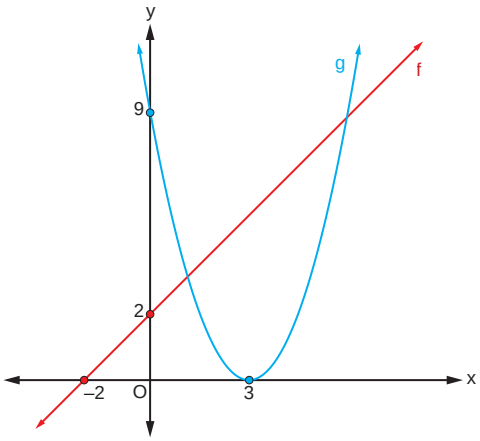
3. $A = [0, 6], B = [1, 9]$ kümeleri veriliyor. $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 4x - 3$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar veriliyor.

Buna göre f · g fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız, tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

4. Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları $(f + g)(x) = x^2$ ve $(f - 2g)(3x) = 2x + 1$ eşitliklerini sağlamaktadır.

Buna göre $(f \cdot g)(3)$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

5.



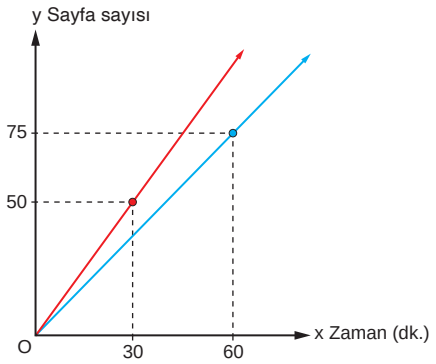
Yanda dik koordinat sisteminde $y = f(x)$ doğrusal fonksiyonu ile ikinci dereceden $y = g(x)$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiği verilmiştir.

Buna göre

a) **f · g fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.**

b) **$(f \cdot g)(5)$ ifadesinin değerini bulunuz.**

6.



Yanda iki aracın 80 dakika boyunca aldığı yolun zamana bağlı doğrusal değişimini gösteren grafikler yer almaktadır.

Buna göre iki aracın x dakika sonunda aldığı toplam yolu ifade eden h fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

5. Tema Ölçme ve Değerlendirme Soruları

Aşağıda cevaplamanız için temaya ait farklı soru tiplerinde 16 adet soru bulunmaktadır.

1-13. bilgi ve becerileri ölçen soruları cevaplayınız.

1. İçinde bir miktar gaz bulunan bir balona sabit hızla gaz dolumu yapılmaktadır.

t, zaman (dakika) olmak üzere balonun içindeki gazın zamana bağlı kütlesi (g) $m(t) = 12t + 120$ şeklinde tanımlı m fonksiyonu ve zamana bağlı balon içindeki gazın hacmi (m^3) $v(t) = 3t + 10$ şeklinde tanımlı v fonksiyonu ile modellenmiştir.

(Maddenin yoğunluğu (d), kütlesinin hacmine oranıyla bulunur.)

Buna göre

a) Balon içindeki gazın zamana bağlı yoğunluğunu veren d fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

b) 10. dakikada balon içindeki gazın yoğunluğunun kaç g/m^3 olacağını bulunuz.

c) Kaçıncı dakikada balon içindeki gazın yoğunluğunun 4,5 g/m^3 olacağını bulunuz.

2. Bir cam fabrikası, ürettiği x adet bardak için üretim maliyetini (TL) $m(x) = 10x + 5$ olarak modellemiştir. Her bir bardağın satış fiyatı 20 TL olarak belirlenmiştir.

Buna göre

a) Satılan x adet bardak için TL cinsinden gelir fonksiyonu olan g nin cebirsel temsilini yazınız.

b) Satılan x adet bardaktan elde edilecek TL cinsinden kâr fonksiyonu olan k nin cebirsel temsilini yazınız.

c) Satılan 100 adet bardaktan elde edilecek kârın kaç TL olduğunu bulunuz.

ç) Üretilen x adet bardak için bardak başına düşen birim maliyet fonksiyonu olan b nin cebirsel temsilini yazınız.

3. Özel yapım bir yük taşıma aracının hızı, taşıdığı yüke bağlı olarak belirlenmektedir. x, aracın yük miktarı (ton) olmak üzere aracın hızı (km/sa.) $v(x) = 20 + \frac{60}{x}$ olarak belirlenmektedir. Aracın hızına bağlı olarak deposundaki yakıtın tükenme süresi değişmektedir.

Aracın hızı v olmak üzere aracın hızına bağlı olarak deposundaki yakıtın tükenme süresi (sa.) $t(v) = \frac{100 - v}{2}$ şeklinde tanımlı t fonksiyonu ile modellenmiştir. Araç, yakıtı tükenince durmaktadır.

Buna göre

a) Aracın yüküne bağlı olarak deposundaki yakıtın tükenme süresini veren f fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

b) Aracın yüküne bağlı olarak gidebileceği yolu veren h fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

c) Aracın 10 ton yük taşıması durumunda kaç km yol gidebileceğini bulunuz.

4. Altının gramının ham madde maliyeti 3000 TL, platinin gramının ham madde maliyeti 1200 TL olduğu bir zamanda bir sarraf, altın ile platini karıştırarak elde ettiği alaşımdan takı üretmektedir. Üretilen takıların işçilik maliyeti, takının içerdiği altın ve platin oranlarına göre değişmektedir. Takının içerdiği altın yüzdesi x olmak üzere 10 g ağırlığındaki bir takının işçilik maliyeti $f(x) = \frac{x^2}{10}$ şeklinde modellenmiştir. Ham madde maliyeti ile işçilik maliyeti toplam maliyeti oluşturmaktadır. Sarraf, ürettiği takıları toplam maliyetinin %20 fazlasına satmaktadır.

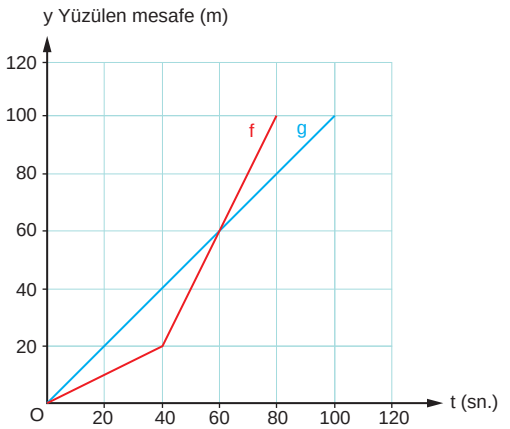
Buna göre

a) Altın yüzdesine bağlı olarak 10 g ağırlığındaki takının ham madde maliyet fonksiyonu olan h nin cebirsel temsilini yazınız.

b) Altın yüzdesine bağlı olarak 10 g ağırlığındaki takının toplam maliyet fonksiyonu olan m nin cebirsel ifadesini yazınız.

c) %80 altın içeren 10 g ağırlığındaki bir takının satış fiyatını TL cinsinden bulunuz.

5. Dünya paralimpik yüzme şampiyonasında 100 metre kadınlar serbest yüzmede yarışan millî yüzücü Defne Kurt ile yarışmadaki diğer sporculardan birinin zamana bağlı yüzülen mesafe sırasıyla f ve g fonksiyonları ile modellenmiştir. f ve g fonksiyonlarına ait grafikler aşağıda verilmiştir.



Verilenlere göre f-g fonksiyonu ile ilgili soruları cevaplayınız.

a) $f - g$ **fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.**

b) $f - g$ **fonksiyonunun grafik temsilini çiziniz.**

c) $f - g$ **fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.**

ç) $f - g$ **fonksiyonunun pozitif ve negatif değerli olduğu aralıkları bulunuz.**

6. Bilgisayarda çalıştırılan bir oyunun çözünürlüğü piksel (p) cinsinden 540p, 720p, 900p, 1080p, 1260p, 1440p olarak seçilebilmektedir. Oyunun çözünürlüğü arttıkça bilgisayarın ekran kartının çalışma hızı da artmaktadır. Ekran kartının çalışma hızı arttıkça da ekran kartının elektrik tüketimi artmaktadır. x, çalıştırılan oyunun çözünürlüğü olmak üzere ekran kartının çalışma hızı (Mhz, Megahertz) $h(x) = \frac{4}{3}x + 300$ şeklinde modellenmiştir. h, ekran kartının çalışma hızı olmak üzere ekran kartının kullandığı elektrik tüketimi (W, Watt) $t(h) = \frac{1}{10}h + 15$ şeklinde modellenmiştir.

Buna göre

a) Bilgisayarda çalıştırılan oyunun çözünürlüğüne bağlı ekran kartının elektrik tüketimini veren f fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

b) Bir oyunun 720p çözünürlükte çalıştırılması durumunda ekran kartının elektrik tüketiminin kaç W olacağını bulunuz.

c) 1080p çözünürlükte çalıştırılan bir oyunun çözünürlüğünün 1440p ye çıkarılması durumunda ekran kartının elektrik tüketimindeki artışın kaç W olacağını bulunuz.

7. Bir kafe işletmecisi olan Utkan, gün içindeki kahve satışlarının değişimini incelemiştir. Kafe 10.00 ile 22.00 saatleri arasında hizmet vermektedir. x, kafenin saat 10.00'dan itibaren açık kaldığı süre (sa.) olmak üzere açılış saatinden itibaren satılan kahve sayısı $f(x) = x^2 + 10x + 40$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu ile modellenmektedir. Örneğin saat 13.00'e kadar kafe 3 saat açık kalmış olacağından saat 13.00'e kadar kafenin toplam kahve satışı $f(3) = 79$ adet olacaktır. Bir kahvenin fiyatı 60 TL'dir.

Buna göre

a) Saat 11.00 ile 17.00 arasında kafede satılan kahve sayısını bulunuz.

b) Kafenin bir gün boyunca kahve satışından elde ettiği cironun kaç TL olduğunu bulunuz.

c) Kafenin açılış saatinden itibaren açık kaldığı süreye bağlı olarak kahve satışından elde ettiği ciroyu veren h fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

8. İşine taksiyle gitmek isteyen Volkan'ın yaşadığı şehirde bir taksideki taksimetre uygulamasında ücret, gidilen mesafeye göre hesaplanmaktadır. Taksimetrenin sabit ücreti 100 TL'dir. Ayrıca taksimetreye, gidilen her 1 km için 40 TL ücret yansıtılmaktadır. x, gidilen yol (km) olmak üzere taksi ücreti f fonksiyonu ile modellenmektedir. Taksimetre ücretine %18 KDV eklenerek müşteriye toplam ücret yansıtılmaktadır. İşe gitmek isteyen Volkan, taksi çağırıyor.

Buna göre

a) Volkan, her gün evinden iş yerine taksi kullanarak gitmekte ve bunun için taksi şoförüne 1062 TL ücret ödemektedir. Volkan'ın evi ile iş yeri arasındaki mesafenin kaç km olduğunu bulunuz.

b) Hafta sonu tarihî mekânları gezmek isteyen Volkan, sırasıyla 12 km ve 18 km'lik iki farklı mesafe için taksi hizmetinden yararlanmıştır. Volkan'ın bu mesafeler için ödediği toplam taksi ücretinin kaç TL olacağını hesaplayınız.

9. Bir yemek işletmesindeki sipariş sayısı arttıkça mutfaktaki hazırlık süresi uzamaktadır.

x, sipariş sayısı olmak üzere siparişin hazırlık süresi (dk.) $h(x) = x^2 - 3x + 15$ şeklinde tanımlı h fonksiyonu ile modellenmektedir.

Siparişin hazırlık süresi uzadıkça teslim süresi de uzamaktadır.

Siparişin teslim süresi (dk.) $t(h) = 1{,}2 \cdot h + 10$ şeklinde tanımlı t fonksiyonu ile modellenmektedir.

Buna göre

a) 8 siparişin teslim süresini hesaplayınız.

b) Siparişlerin teslim süresinin 40 dakikayı geçmemesi için alınabilecek sipariş sayısının en çok kaç adet olması gerektiğini bulunuz.

10. Bir spor salonunun fiyat tarifesi şöyledir:

- Üyelik süresi kadar aylık belli bir ücret ödenir. (1 ay = 300 TL)
- Kayıt olurken bir defaya mahsus 100 TL giriş ücreti alınır.
- Öğrencilere toplam tutar üzerinden %20 indirim yapılır.

Buna göre

a) x aylık üyelik oluşturan bir öğrencinin ödeyeceği indirimli toplam ücreti ifade eden h fonksiyonunu yazınız.

b) 5 aylık üyelik oluşturan Hatice Hanım ve öğrenci Melike'nin ödeyecekleri toplam ücretin kaç TL olacağını bulunuz.

11. Öğrencilerini sınavla alan bir kolej, öğrencilerine sınavdaki doğru cevap sayılarına bağlı olarak indirim uygulamaktadır.

100 soruluk sınavdan alınan kolej puanı, doğru cevap sayısına (x) göre modelleyen f fonksiyonu $f(x) = 40 \cdot \sqrt{x + 44} + 20$ şeklinde tanımlanmıştır. 300 puan ve üzeri alan öğrencilere sınavdan aldığı puana (m) göre yüzde $g(m) = \frac{m}{5}$ oranında indirim uygulanmaktadır.

Buna göre

a) Sınavda 37 soruyu doğru cevaplayan Utku'nun yüzde kaç indirim kazanacağını bulunuz.

b) Defne'nin en az %84 ve en fazla %92 indirim kazanabilmesi için doğru cevaplaması gereken soru sayısının alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

12. Bir dijital eğitim platformunda bir videonun aldığı beğeni sayısı x olmaktadır. $(x \in \mathbb{N})$ Videonun aldığı beğeni sayısına bağlı videonun görünürlük puanı $f(x) = \log_3(x + 10)$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu ile hesaplanmaktadır. k görünürlük puanına göre videoda reklam gösterilme sıklığı $g(k) = 5k$ şeklinde tanımlı g fonksiyonu ile hesaplanmaktadır.

Buna göre

a) Bir videonun aldığı beğeni sayısına bağlı olarak videoda reklam gösterilme sıklığını veren bileşke fonksiyonunun cebirsel ifadesini yazınız.

b) Beğeni sayısı 71 olan bir videoda reklam gösterilme sıklığını bulunuz.

c) Reklam gösterilme sıklığı 25 olan bir videonun beğeni sayısını bulunuz.

13. Bir markanın mobil uygulamasından gelen bildirimi açan İnci, aşağıdaki görselde verilen indirim kampanyasının başladığını görmüştür.

> İlk alışverişinizde "Hoş geldiniz!" hediyesi olarak 10 puan ve alışverişinizin %5 'i kadar puan kazanın.
> Sonraki alışverişte puanınızın 2 katı kadar indirim kazanın.

Yapılan her x TL'lik ilk alışveriş için kazanılacak puanı veren fonksiyon f, kazanılan puanları sonraki alışverişte TL indirimine dönüştüren fonksiyon g olmaktadır.

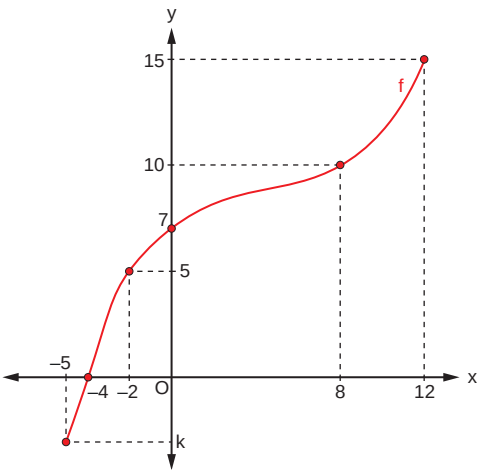
Buna göre

a) x TL tutarındaki ilk alışverişe karşılık sonraki alışverişte kazanılacak indirim miktarını veren h fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

b) 300 TL'lik ilk alışverişe karşılık sonraki alışverişte kaç TL indirim kazanılacağını bulunuz.

14-16. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

14. f fonksiyonuna ait grafik aşağıda verilmiştir.

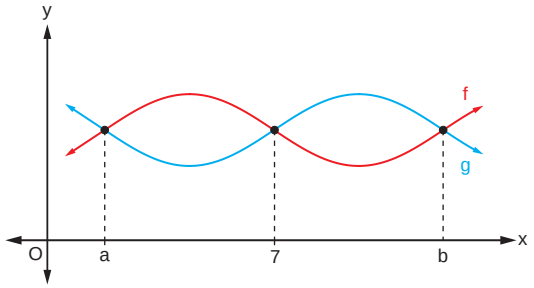


f fonksiyonu ve uygun tanım ve değer kümesine sahip $g(x) = -x$ şeklinde tanımlı g doğrusal fonksiyonu kullanılarak $f \circ g$ bileşke fonksiyonu tanımlanmıştır. $f \circ g$ bileşke fonksiyonunun tanım kümesi A ve görüntü kümesi B olmak üzere $A \cap B = [m, n]$ ve $f \circ g$ bileşke fonksiyonunun maksimum noktası ile minimum değerinin toplamı -15 olmaktadır.

Buna göre $m + n \cdot k$ ifadesinin gerçek sayı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -20 B) -18 C) -16 D) -15 E) -12

15. a ve b birer tam sayı olmak üzere gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonlarının dik koordinat sistemindeki grafikleri aşağıda verilmiştir.



Verilen grafiklere göre $[a, b]$ nda

$(f - g)(x) > 0$ şartını sağlayan 3 tane tam sayı değeri $(f - g)(x) < 0$ şartını sağlayan 5 tane tam sayı değeri vardır.

Buna göre $f(x) = g(x)$ şartını sağlayan x gerçek sayı değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 17 B) 19 C) 21 D) 23 E) 25

16. Yağmur, bileşke fonksiyonların nitel özellikleriyle ilgili bir önermeyi doğrulamak için aşağıdaki örnek durumu yazmıştır.

Örnek durum: "f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x$ ve g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -2x + 5$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar için $g \circ f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = -6x + 5$ olur."

Yağmur'un yazdığı örnek durum aşağıdaki önermelerden hangisini doğrulamak için yazılmış olabilir?

A) f artan fonksiyon ve g azalan fonksiyon ise $g \circ f$ azalan fonksiyon olur.

B) f azalan fonksiyon ve g artan fonksiyon ise $g \circ f$ azalan fonksiyon olur.

C) f tek fonksiyon ve g çift fonksiyon ise $g \circ f$ çift fonksiyon olur.

D) f tek fonksiyon ve g tek fonksiyon ise $g \circ f$ tek fonksiyon olur.

E) f artan fonksiyon ve g artan fonksiyon ise $g \circ f$ artan fonksiyon olur.

Tema ile ilgili daha fazla soruya yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

SÖZLÜK

A-B-C

aritmetik dizi : Ardışık terimleri arasındaki fark değişmeyen dizi.

armoni : İki veya daha çok sesin aynı anda kulağa hoş gelecek bir biçimdeki uygunluğu; uyum, harmoni.

aykırı değer : Diğer değerlerle karşılaştırıldığında veri setine uygun olmadığı tespit edilen değer.

bilişsel : Zekânın işleyişiyle ilgili.

biyokimyasal : Biyokimya ile ilgili.

ciro : Ticari kuruluşlarda bir yıl içinde yapılan işlemlerin toplam değeri; iş hacmi.

Ç-D-E

deklanşör : Fotoğraf makinesinin fotoğraf çekilirken basılan düğmesi.

diyagram : Herhangi bir olayın değişimini gösteren grafik.

doktrin : Öğreti.

drone : Uzaktan kumanda ile kontrol edilebilen, komut verilebilen, video ve görüntü kaydı yapabilen insansız hava aracı.

ekosistem : Belirli bir alanda bulunan canlılar ile bunları saran çevrenin karşılıklı ilişkileri ile meydana gelen ve süreklilik gösteren ekolojik sistem.

endeks : Gösterge.

envanter : Bir ticaret kuruluşunun para, mal ve diğer varlıklarıyla genel olarak borçlu ve alacaklı durumlarını, nicelikleri ve değerleriyle ayrıntılı olarak gösterme.

enzim : Bir kimyasal tepkimeyi gerçekleştiren ve onu hızlandıran, çoğunlukla protein yapısında olan organik madde.

epidemik : Salgın hastalıkla ilgili.

erozyon : Yer kabuğunu oluşturan kayaçların, başta akarsular olmak üzere türlü dış etmenlerle yıpratılıp yerinden koparılarak eritilmeleri veya bir yerden başka bir yere taşınması olayı; aşınma, aşınım, itikâl.

F-G-Ğ-H-I-İ-J

fanus : Saat, mikroskop vb. araçları tozdan korumak için üzerlerine kapatılan, yarım küre biçiminde cam kap.

frekans : Sıklık.

genlik : Dalga genliği.

geometrik dizi : Ardışık terimleri arasındaki oranı değişmeyen dizi.

havza : Suları aynı deniz, göl veya nehre akan, dağ veya tepelerle sınırlanmış kara parçası.

hidroelektrik : Su gücüyle elde edilen elektrik enerjisi.

istihdam : Bir görevde, bir işte kullanma.

jeopolitik : Coğrafya, ekonomi, nüfus vb.nin bir devletin politikası üzerindeki etkisi.

jeotermal : Yer altında bulunduğu veya yer altından geçtiği için sıcaklığı yüksek olan.

K-L-M-N

kiriş : Bir eğrinin iki noktasını birleştiren doğru parçası.

kulaç : Gerilerek açılmış iki kolun parmak uçları arasındaki uzaklık.

kümbet : Damı koni veya piramit biçiminde olan, yuvarlak veya köşeli yapı.

mahfaza : İçinde küpe, yüzük, bilezik vb. mücevherlerin saklandığı küçük, kapalı kutu.

mihrap : Cami, mescit vb. yerlerde Kâbe yönünü gösteren, duvarda bulunan ve imama ayrılmış olan oyuk veya girintili yer.

minber : Camilerde hutbe okunan merdivenli, yüksekçe yer.

muhakeme : Bir sorunu çözmek için çıkar yol arama.

nihai : İşi sona erdiren, işi kesen.

O-Ö-P-R

pıtrak : Sarı çiçekli, dikenli bir yıllık otsu bitki.

platform : 1. Ahşap, taş, metal vb. bir maddeden yapılmış, düz ve yüksekçe yer. 2. ortam.

platin : Atom numarası 78 olan değerli bir element.

potansiyel : Gelecekte oluşması, gelişmesi mümkün olan.

radyoaktif madde : Alfa, beta veya gama ışınlarını yayma özelliği olan madde.

rahle : Üzerinde kitap okunan, yazı yazılan, bazıları açılıp kapanabilen alçak, küçük masa.

raptiye : Düz, geniş başlı, kısa bir çivi görünüşünde, kâğıt veya karton vb. şeyleri bir yere tutturmak için kullanılan araç.

riyazi : Matematiksel.

rota : Bir gemi veya uçağın gidiş yönü, izleyeceği yol.

S-Ş-T-U-Ü-V-Y-Z

sarkaç : Durağan bir nokta çevresinde ağırlığının etkisiyle serbestçe salınım yapan cisim; rakkas, pandül.

sismik : Depremle ilgili.

sondaj : Yeryüzünde bir delik veya kuyu açmak için yapılan delme işlemi.

tabliye : Köprü yapımında ilk olarak yerleştirilen ve köprüyü oluşturan bölüm.

termodinamik : Isı enerjisi ile kinetik enerji arasındaki ilişkileri ve bu konuyla ilgili olayları inceleyen fizik kolu.

verici : Elektromanyetik dalgalar yardımıyla işaret, ses ve görüntü iletmeye yarayan cihazların genel adı.

KAYNAKÇA

Akkuş, R., Boz Yaman, B., Bulut, S., Duatepe Paksu, A. & Toluk Uçar, Z. (2022). *Geometri öğretim bilgisi.* Ankara: Pegem Akademi.

Atatürk, M. K. (2020). *Geometri*. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Demana, F. D., Waits, B. K., Foley, G. D. & Kennedy, D. (2007). *Precalculus: Graphical, numerical, algebraic (7th ed.)*. Boston, MA: Pearson/Addison Wesley.

Duran, R. (2016). İslam felsefesinde "Vucud-u Zihni" (zihinsel varlık) anlayışına bir geç dönem Osmanlı örneği: İsmail Gelenbevî II. *Yakın Doğu Üniversitesi İslam Tetkikleri Merkezi Dergisi, 2*(1), 139–159.

Özenç, F. K. (2023). Ürün raporu zeytinyağı 2021. *Eğitim Bilim Toplum Dergisi / Journal of Education Science Society*, *21*(83), 33–84. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/3369412

Sathaye, A. (2009). *Precalculus with geometry and trigonometry*. Lexington, KY: University of Kentucky.

T.C. Millî Eğitim Bakanlığı. (2026). *Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (9, 10, 11 ve 12. sınıflar)*. Ankara.

T.C. Millî Eğitim Bakanlığı. (2025). *Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli Öğretim Programları Ortak Metni.* Ankara.

Young, C. Y. (2014). *Precalculus* (2nd ed.). Hoboken, NJ: Wiley.

* Kaynakça APA6 formatında hazırlanmıştır.

Cevap Anahtarı'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.

Görsel ve Genel Ağ Kaynakçası'na yandaki karekoddan ulaşabilirsiniz.


25°D
30°D
35°D
40°D
45°D
50°D
40°K
35°K
ROMANYA
Bükreş
UKRAYNA
RUSYA FEDERASYONU
HAZAR DENİZİ
Tuna N.
Sofya
BULGARİSTAN
K A R A D E N İ Z
GÜRCİSTAN
Tiflis
Edirne
Kırklareli
Sinop
Bartın
Zonguldak
Kastamonu
ACARA Ö.C.
Artvin
Kura N.
Ardahan
ERMENİSTAN
AZERBAYCAN
YUNANİSTAN
Tekirdağ
İstanbul
Samsun
Ordu
Giresun
Trabzon
Rize
Kars
Erivan
Meriç N.
MARMARA DENİZİ
Kocaeli
Düzce
Karabük
Yalova
Sakarya
Bolu
Çankırı
Amasya
Çoruma N.
Gökçeada
Çanakkale
Bozcaada
Bursa
Bilecik
Tokat
Yeşilırmak N.
Gümüşhane
Bayburt
Çoruh N.
Iğdır
Nahçıvan Ö.C. (AZERBAYCAN)
Aras N.
Balıkesir
Ankara
Sakarya N.
Erzincan
Erzurum
Ağrı
Eskişehir
Kırıkkale
Yozgat
Kızılırmak N.
Sivas
Fırat N.
Tunceli
Bingöl
Muş
Van Gölü
Van
Bitlis
Kütahya
Kırşehir
Manisa
Gediz N.
Afyonkarahisar
Tuz Gölü
Elâzığ
Malatya
Atina
İzmir
Uşak
Nevşehir
Kayseri
Küçük Menderes N.
Aksaray
Diyarbakır
Siirt
Batman
Urumiye Gölü
Aydın
Büyük Menderes N.
Konya
Adıyaman
Dicle N.
Hakkâri
Denizli
Isparta
Niğde
Kahramanmaraş
Şırnak
İ R A N
Burdur
Mardin
Muğla
Karaman
Osmaniye
Gaziantep
Şanlıurfa
Antalya
Adana
Seyhan N.
Ceyhan N.
Mersin
Kilis
Göksu N.
Hatay
Asi N.
Dicle N.
KUZEY KIBRIS TÜRK CUMHURİYETİ
Erenköy
Lefkoşa
S U R İ Y E
I R A K
GÜNEY KIBRIS RUM YÖNETİMİ
LÜBNAN
Beyrut
Bağdat
Şam
A K D E N İ Z
L İ B Y A
Tel Aviv
FİLİSTİN
Batı Şeria
Doğu Kudüs
FİLİSTİN
Gazze Şeridi
İSRAİL
M I S I R
Süveyş K.
TÜRKİYE'NİN MÜLKİ İDARE BÖLÜMLERİ İLE KARA VE DENİZ KOMŞULARI HARİTASI
BAŞKENT
Ankara
İL MERKEZİ
Elâzığ
GÖL
ÜLKE SINIRI
ÖZERK BÖLGE SINIRI
AKARSU
0 50 100 200 300 400 km
Harita Genel Müdürlüğü tarafından üretilmiştir.


TÜRK DÜNYASI HARİTASI
Bağımsız Türk Devletleri
Türk Cumhuriyetleri, Türk Bölgeleri
Türk Toplulukları
0 250 500 1.000 1.500 2.000 km
TÜRK CUMHURİYETLERİ, TÜRK BÖLGELERİ
1 GAGAVUZ YERİ
2 KARAÇAY-ÇERKESYA
3 KABARDİN-BALKARYA C.
4 DAĞISTAN C.
5 ÇUVAŞİSTAN C.
6 TATARİSTAN C.
7 BAŞKURT C.
8 KARAKALPAKİSTAN C.
9 ALTAY C.
10 HAKASYA C.
TÜRK TOPLULUKLARI
a Avrupa'daki Türkler
b Kosova Türkleri
c Yunanistan Türkleri
ç Bulgaristan Türkleri
d Romanya Türkleri
e Suriye Türkmenleri
f Irak Türkmenleri
g İran Türkleri
h Afganistan Türkmenleri
ı Pakistan Türkmenleri
i Hindistan Türkmenleri
j Çin H. C. Türkleri
k Moğolistan Türkleri
l Rusya Federasyonu Türkleri
ÜLKE KISALTMALARI
ARNAVUTLUK ARN
BELÇİKA BEL
BOSNA - HERSEK BH
GÜNEY KIBRIS RUM YÖNETİMİ GKRY
HIRVATİSTAN HRV
İSVİÇRE İSV
KARADAĞ KRD
KOSOVA KSV
KUZEY KIBRIS TÜRK CUMHURİYETİ KKTC
KUZEY MAKEDONYA KMKD
LİHTENŞTAYN LİH
SIRBİSTAN SRB
TÜRKİYE
KAZAKİSTAN
ÖZBEKİSTAN
TÜRKMENİSTAN
KIRGIZİSTAN
TACİKİSTAN
AZERBAYCAN
RUSYA FEDERASYONU
SAHA (YAKUT) C.
TUVA C.
SİNCAN UYGUR ÖZERK BÖLGESİ
MOĞOLİSTAN
ÇİN HALK CUMHURİYETİ
HİNDİSTAN
PAKİSTAN
AFGANİSTAN
İRAN
IRAK
SURİYE
Akdeniz
Karadeniz
Hazar Denizi
Barents Denizi
Kara Denizi
Norveç Denizi
Ohotsk Denizi
Bering Denizi
Umman Denizi
Yemen Denizi
Kızıldeniz
30°B 20°B 10°B 0° 10°D 20°D 30°D 40°D 50°D 60°D 80°D 100°D 120°D 130°D 140°D 150°D 160°D 170°D 180°
10°K 20°K 30°K 40°K 50°K